Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

76. BAND, 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 9. MAI 1961)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1961

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Portania.

F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,

H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

Springer-Verlag OHG

Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319

Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

Göttingen, Weender Straße 60.

76. Band **Inhalt** **1. Heft**

Seite

Ehlich, H., Die positiven Lösungen der Gleichung $y^a - [y^a] = y^b - [y^b] = y^c - [y^c]$. 1

Tillmann, H. G., Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. II . 5

Cigler, J., Hausdorffsche Dimensionen spezieller Punktmengen 22

Raymond, F., Local Cohomology Groups with Closed Supports 31

Marcus, S., Les approximations diophantiennes et la catégorie de Baire 42

Schmidt, H., Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen 46

Sanders, B. L., Concerning a Theorem of Ky Fan's 51

Kunz, E., Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper 56

Nastold, H.-J., Zum Dualitätssatz in inseparablen Funktionenkörpern der Dimension 1 75

André, J., Über Parallelstrukturen. Teil I: Grundbegriffe 85

EHLICH, H.
Math. Zeitschr. 76, 1–4 (1961)

Die positiven Lösungen der Gleichung

$$y^a - [y^a] = y^b - [y^b] = y^c - [y^c]$$

Von

HARTMUT EHLICH

1. Es bezeichne $[y]$ wie üblich die größte ganze Zahl kleiner oder gleich y und es sei $\{y\} = y - [y]$. Herr E. G. STRAUS hat kürzlich die Frage aufgeworfen, ob aus

$$y \geqq 0 \quad \text{und} \quad \{y^a\} = \{y^b\} = \{y^c\}$$

für paarweise verschiedene positive ganze Zahlen a, b, c stets $\{y^a\} = 0$ folgt[1) 1a)]. Die Antwort liefert, wie in der vorliegenden Note bewiesen werden soll, der folgende

Satz 1. *Sind a, b, c paarweise verschiedene positive ganze Zahlen und ist d ihr größter gemeinsamer Teiler, so folgt aus*

$$\{y^a\} = \{y^b\} = \{y^c\} \tag{1}$$

für $0 \leqq y \leqq 1$

$$\{y\} = 0, \quad d.h. \quad y = 0 \quad oder \quad y = 1$$

und für $y > 1$

$$\{y^d\} = 0, \quad d.h. \quad y^d \text{ ist eine ganze Zahl.}$$

Daß für $y > 1$ der Exponent d nicht durch eine kleinere positive Zahl ersetzt werden kann, zeigt das Beispiel $y = 2^{\frac{1}{3}}$, $a = 15$, $b = 9$, $c = 6$; in diesem Fall ist $d = 3$,

$$\{(2^{\frac{1}{3}})^{15}\} = \{(2^{\frac{1}{3}})^{9}\} = \{(2^{\frac{1}{3}})^{6}\} = 0 \quad \text{und} \quad \{(2^{\frac{1}{3}})^{3}\} = 0,$$

aber für jeden Exponenten s mit $1 \leqq s < d$ wird $\{(2^{\frac{1}{3}})^s\} \neq 0$.

2. O.B.d.A. sei

$$a > b > c. \tag{2}$$

Ist $0 \leqq y \leqq 1$, so erhalten wir allein aus der Forderung $\{y^a\} = \{y^b\}$:

$$\{y^a\} - \{y^b\} = y^a - y^b - [y^a] + [y^b] = y^b(y^{a-b} - 1) = 0,$$

wegen (2) also $y = 0$ oder $y = 1$.

---

1) Report of the Institute in the theory of numbers. University of Colorado, Boulder, Colorado, June 21 — July 17, 1959, S. 336.

1a) *Zusatz bei der Korrektur:* Das gleiche Problem wird in ähnlicher Weise in FRED SUPNICK, H. J. COHEN und J. F. KESTON: On the powers of a real number reduced modulo one. Transactions A.M.S. **94**, 244–257 (1960) behandelt. Auf diese Arbeit wiesen mich freundlicher Weise die Herren LEWIS und LEKKERKERKER hin.

3. Im folgenden sei daher stets $y>1$. Genügt y der Gl. (1), so gibt es zwei nichtnegative ganze Zahlen m und n, nämlich $m=[y^a]-[y^c]$ und $n=[y^b]-[y^c]$, so daß y eine gemeinsame Nullstelle der beiden Polynome

$$\begin{cases} f(x)=x^a-x^c-m \\ g(x)=x^b-x^c-n \end{cases} \tag{3}$$

ist. Sind andererseits m und n nichtnegative ganze Zahlen und haben die beiden Polynome (3) eine gemeinsame Nullstelle $y>1$, so folgt

$$y^a-y^c-m=\{y^a\}-\{y^c\}+[y^a]-[y^c]-m=0$$
$$y^b-y^c-n=\{y^b\}-\{y^c\}+[y^b]-[y^c]-n=0.$$

Die beiden Ausdrücke $\{y^a\}-\{y^c\}$ und $\{y^b\}-\{y^c\}$ sind also ganz. Da aber für jede reelle Zahl $\tilde{y}$ nach Definition $0\leqq\{\tilde{y}\}<1$ gilt, folgt $\{y^a\}-\{y^c\}=0$ und $\{y^b\}-\{y^c\}=0$, also (1). Für $y>1$ ist daher Satz 1 gleichwertig mit

Satz 2. *Genügen die positiven ganzen Zahlen a, b, c der Ungleichung* (2), *ist d ist größter gemeinsamer Teiler, sind m und n nichtnegative ganze Zahlen und haben die beiden Polynome* (3) *eine gemeinsame Nullstelle $y>1$, so ist y^d eine ganze Zahl.*

4. Da die beiden Polynome f und g die gemeinsame Nullstelle $y>1$ besitzen, gilt

$$m>n\geqq 1. \tag{4}$$

Wäre nämlich $m\leqq n$, so folgte

$$0=f(y)-g(y)=y^a-y^b-(m-n)\geqq y^b(y^{a-b}-1),$$

nach (2) also $y\leqq 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung $y>1$. Ebenso folgte aus $n=0$

$$g(y)=y^c(y^{b-c}-1)=0,$$

wegen (2) also wieder $y\leqq 1$.

Bei den Koeffizienten von f tritt ein Vorzeichenwechsel auf. $f(x)$ hat demnach höchstens eine positive Nullstelle. Wegen $f(0)=-m<0$ ist deshalb

$$f(x)<0 \quad \text{für} \quad 0\leqq x<y, \qquad f(y)=0, \qquad f(x)>0 \quad \text{für} \quad y<x. \tag{5}$$

Ist nun u irgendeine Nullstelle von $f(x)$, so ergibt sich einerseits

$$m=|u^a-u^c|\geqq|u|^a-|u|^c, \quad \text{also} \quad f(|u|)\leqq 0 \tag{6}$$

und andererseits

$$|u|^a=|m+u^c|\geqq m-|u|^c\geqq 2-|u|^c. \tag{7}$$

Wäre $|u|<1$, so folgte aus der letzten Ungleichung

$$1>|u|^a\geqq 2-|u|^c>1.$$

Zusammen mit (5) und (6) erhalten wir daher: *Ist u irgendeine Nullstelle von f, so ist $1\leqq|u|\leqq y$.*

5. Da die beiden Polynome $f(x) = x^a - x^c - m$ und $g(x) = x^b - x^c - n$ ganze rationale Koeffizienten und mindestens eine gemeinsame Nullstelle haben, gibt es ein Polynom $t(x) = t_r x^r + t_{r-1} x^{r-1} + \cdots + t_0$ mit ganz rationalen Koeffizienten t_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, r$) höchstem Koeffizienten $t_r = 1$ und positiven Grad r, das f und g teilt[2]). Die Nullstellen von t sind dabei die gemeinsamen Nullstellen von f und g. Das Produkt der Beträge dieser Nullstellen ist gleich $|t_0|$. Nach **4** ist jeder dieser Beträge größer oder gleich 1 und für die Nullstelle y gilt nach Voraussetzung $y > 1$. Daher ist auch $|t_0| > 1$ und, da t_0 eine ganze Zahl ist, ist $|t_0| \geqq 2$.

Da $t(x)$ ein Teiler von $g(x)$ ist, teilt t_0 insbesondere n; wegen $n > 0$ folgt deshalb $n \geqq 2$ und somit nach (4) $m \geqq 3$. Statt (7) erhalten wir damit für die Beträge aller Nullstellen u von f die günstigere Abschätzung

$$|u|^a = |m + u^c| \geqq 3 - |u|^c, \tag{7a}$$

die zeigt, daß für alle Nullstellen u von f die Ungleichung $|u| > 1$ gültig ist.

6. Nach Definition ist $t(x)$ auch ein Teiler von

$$n f(x) - m g(x) = n x^a - m x^b + (m - n) x^c.$$

Wegen $m = t(x) \dfrac{f(x)}{t(x)} - x^c (x^{a-c} - 1)$ sind x^c und $t(x)$ teilerfremd[2]). $t(x)$ teilt daher das Polynom $h(x) = n x^{a-c} - m x^{b-c} + m - n$. $h(x)$ hat somit die Nullstelle $y > 1$. Außerdem ist $h(1) = 0$. Die Ableitung

$$h'(x) = x^{b-c-1} \left(n(a-c) x^{a-b} - m(b-c) \right)$$

besitzt genau eine positive Nullstelle; diese muß nach dem Satz von ROLLE zwischen 1 und y liegen. Da ferner $h(0) = m - n > 0$ ist, ergibt sich

$$h(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \quad \text{und} \quad x \geqq y, \quad h(x) < 0 \quad \text{für} \quad 1 < x < y. \tag{8}$$

Bezeichnet v irgendeine Nullstelle von $h(x)$, so ist

$$m - n = m v^{b-c} - n v^{a-c} = |m v^{b-c} - n v^{a-c}| \geqq m |v|^{b-c} - n |v|^{a-c}$$

oder

$$h(|v|) = n |v|^{a-c} - m |v|^{b-c} + m - n \geqq 0.$$

Nach (8) gilt also entweder $0 \leqq |v| \leqq 1$ oder $y \leqq |v|$.

7. Ist nun w eine Nullstelle von $t(x)$, so ist auch

$$f(w) = g(w) = h(w) = 0.$$

Für $|w|$ müssen daher die Ungleichungen

$$1 < |w| \leqq y \quad \text{und} \quad 0 \leqq |w| \leqq 1 \quad \text{oder} \quad y \leqq |w|$$

gelten, d.h. es muß $|w| = y$ oder $w = y e^{i\varphi}$ ($0 \leqq \varphi < 2\pi$) sein. Die möglichen Werte für φ wollen wir im folgenden bestimmen:

[2]) Vgl. etwa O. PERRON, Algebra I, 3. Aufl., 1951, §§ 36, 37, oder G. PICKERT, Einführung in die höhere Algebra, 1951, Kap. III, oder B. L. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra I, 4. Aufl., 1955, §§ 20–22.

Aus $f(y e^{i\varphi}) = 0$ folgt $y^a e^{ia\varphi} = y^c e^{ic\varphi} + m$ und durch Übergang zum Quadrat der Beträge

$$y^{2a} = y^{2c} + m^2 + 2m\, y^c \cos c\varphi,$$

während sich aus $f(y) = 0$

$$y^{2a} = y^{2c} + m^2 + 2m\, y^c$$

ergibt. Durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir $\cos c\varphi = 1$, also $e^{ic\varphi} = 1$. Aus $f(y) = f(y e^{i\varphi}) = g(y) = g(y e^{i\varphi}) = 0$ erhalten wir dann weiter

$$\frac{1}{y^a}\left(f(y e^{i\varphi}) - f(y)\right) = e^{ia\varphi} - 1 = 0$$

$$\frac{1}{y^b}\left(g(y e^{i\varphi}) - g(y)\right) = e^{ib\varphi} - 1 = 0.$$

Ist $d = (a, b, c)$, so sind aber alle gemeinsamen Lösungen φ $(0 \leqq \varphi < 2\pi)$ der drei Gleichungen

$$e^{ia\varphi} = 1, \qquad e^{ib\varphi} = 1, \qquad e^{ic\varphi} = 1$$

die d Werte $\varphi_\nu = 2\pi \frac{\nu}{d}$, $\nu = 0, 1, \ldots, d-1$. $t(x)$ hat also genau die Nullstellen $w_\nu = y \exp\left(2\pi i \frac{\nu}{d}\right)$, $\nu = 0, 1, \ldots, d-1$, d.h. es ist

$$t(x) = x^r + t_{r-1} x^{r-1} + \cdots + t_0 = \prod_{\nu=0}^{d-1} (x - w_\nu) = x^d - y^d.$$

Da t ganze rationale Koeffizienten hat, ist — wie in Satz 2 behauptet — y eine ganze Zahl.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. Juli 1960)

TILLMANN, H. G.
Math. Zeitschr. 76, 5—21 (1961)

Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen. II

Von

HEINZ GÜNTHER TILLMANN

Vor einigen Jahren zeigte G. KÖTHE [*1, 2*], daß die stetigen linearen Funktionale auf dem Raum $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ der auf der abgeschlossenen reellen Geraden $\overline{R}$ holomorphen und im Punkte ∞ verschwindenden Funktionen umkehrbar eindeutig durch die Paare $\tilde{u}=(\tilde{u}_+, \tilde{u}_-)$ von holomorphen Funktionen in der oberen bzw. unteren Halbebene dargestellt werden können. Dabei ist die Zuordnung gegeben durch

$$\tilde{u}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\, u\left[\frac{1}{z-\zeta}\right], \quad \zeta\notin\overline{R}$$

$$u[f]=\int_{C^+}\tilde{u}_+(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta-\int_{C^-}\tilde{u}_-(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta=u_+[f]+u_-[f], \qquad f\in H(\overline{R}).$$

Hier sind C^+, C^- geschlossene Jordan-Kurven, welche alle singulären Stellen von f in der jeweiligen Halbebene einschließen.

Haben $\tilde{u}_+$, $\tilde{u}_-$ auf der reellen Geraden noch stetige Randwerte und verschwinden sie für $\zeta\to\infty$, so lassen sich die Integrationswege auf die reelle Gerade verlegen und das Funktional u kann mit der durch die Randwerte bestimmten Funktion $u(x)=\tilde{u}_+(x+i0)-\tilde{u}_-(x-i0)$ identifiziert werden. Da jedes Funktional u approximiert werden kann durch Funktionale, denen Funktionen mit stetigen Randwerten auf R entsprechen, bezeichnete G. KÖTHE die stetigen linearen Funktionale auf $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ allgemein als Randverteilungen der ihnen zugeordneten holomorphen Funktionenpaare.

Nun können gewisse dieser Randverteilungen in natürlicher Weise mit Distributionen (im Sinne von L. SCHWARTZ [*3*]) identifiziert werden. So lassen sich etwa alle Distributionen auf R mit kompaktem Träger als Randverteilungen von holomorphen Funktionen auffassen [*5*].

Aber dieses Resultat läßt sich noch wesentlich verallgemeinern. In dieser Note wird gezeigt, daß alle Distributionen t, die Ableitungen endlicher Ordnung von Funktionen aus L^p, $1<p<\infty$, sind (d.h. $t\in(\mathscr{D}'_{L^p})$ im Sinne von SCHWARTZ [*4*], S. 56), als Randverteilungen analytischer Funktionen $\tilde{t}(\zeta)$ aufgefaßt werden können und diese $\tilde{t}$ werden funktionentheoretisch charakterisiert.

Das Prinzip dieser Zuordnung ist das folgende:

Die Distribution t (als stetiges lineares Funktional auf dem Raume $\mathscr{D}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger) wird fortgesetzt zu einem stetigen linearen Funktional $\hat{t}$ auf einem $\mathscr{D}$ umfassenden

Raum L, in dem $\mathscr{D}$ wie auch der Raum $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ dicht liegen und die Topologie von L gröber ist als die Topologien von $\mathscr{D}$ bzw. $\boldsymbol{H}(\overline{R})$. Dann induziert $\hat{t}$ auf $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ein stetiges lineares Funktional t_0 und t_0 und t bestimmen sich gegenseitig eindeutig. t_0 wiederum ist umkehrbar eindeutig durch die holomorphe Funktion $\tilde{t}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\, t_0\left[\frac{1}{z-\zeta}\right]=\frac{1}{2\pi i}\,\hat{t}_x\left[\frac{1}{x-\zeta}\right]$ charakterisiert, wobei $\tilde{t}=(\tilde{t}_+,\tilde{t}_-)$ aus je einer Komponente $\tilde{t}_+$ in der oberen und $\tilde{t}_-$ in der unteren Halbebene besteht.

Die Indikatrix $\tilde{t}$ vermittelt eine Approximation der Distributionen t durch die analytischen Funktionen $t_\varepsilon(x)=\tilde{t}_+(x+i\varepsilon)-\tilde{t}_-(x-i\varepsilon)$ und in den Räumen L^p, $\mathscr{D}_{L^p}$, $(\mathscr{D}_{L^p})'$, $1<p<\infty$, bilden die Abbildungen T_ε: $t\to t_\varepsilon$, $\mathrm{Re}(\varepsilon)>0$ eine stetige Halbgruppe, insbesondere konvergiert t_ε gegen t im Sinne der starken Topologie dieser Räume.

Für Funktionen $g\in L^2$ liefert die Zerlegung

$$g=g_+-g_-,\qquad g_\pm(x)=g_\pm(x\pm i\,0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\tilde{g}_\pm(x\pm i\,\varepsilon)$$

insbesondere eine orthogonale Zerlegung von $L^2=L^2_+\oplus L^2_-$, wobei also $L^2_+(L^2_-)$ aus Randverteilungen holomorpher Funktionen in der oberen (unteren) Halbebene besteht und übereinstimmt mit den Fourier-Transformierten von Funktionen mit Träger in der rechten (linken) Halbgeraden. Alle diese Resultate sind auf mehrere Variable übertragbar.

In einer folgenden Note werden diese Resultate benutzt, um auch alle gemäßigten Distributionen und Distributionen endlicher Ordnung als Randverteilungen analytischer Funktionen darzustellen, und zwar als Randverteilungen „langsam wachsender" analytischer Funktionen.

Dieser Zusammenhang zwischen Distributionen und analytischen Funktionen liefert einen neuen und im Hinblick auf zahlreiche Anwendungen, insbesondere in der mathematischen Physik, recht zweckmäßigen Zugang zur Distributionentheorie:

Man geht aus von einem Teilraum von $\boldsymbol{H}(\Omega-\overline{R})$ der aus Paaren „langsam wachsender" analytischer Funktionen besteht. Jedes solche Paar $\tilde{u}=(\tilde{u}_+,\tilde{u}_-)$ kann man dann als eine Distribution u ansehen und u ist Limes der Näherungen $u_\varepsilon(x)=\tilde{u}_+(x+i\varepsilon)-\tilde{u}(x-i\varepsilon)$. Insbesondere bestimmt u dann auch ein stetiges lineares Funktional auf den Raum $\mathscr{D}$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen: $u[\varphi]=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon[\varphi]=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_R u_\varepsilon(x)\,\varphi(x)\,dx$, so daß sich der Zusammenhang mit dem Schwartzschen Aufbau der Distributionentheorie recht einfach herstellen läßt.

1. Die Räume $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{R}})$ und $\mathscr{D}_{\boldsymbol{L^p}}(\boldsymbol{R})$

a) Es sei Ω die Riemannsche Zahlenkugel, R die reelle Gerade und $\overline{R}=R\cup\{\infty\}$.

$\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist der lineare Raum der in $\overline{R}$ lokalanalytischen Funktionen (die in ∞ verschwinden), in dem auf folgende Weise eine lokalkonvexe Topologie

eingeführt ist[1]). $\{U_n\}$ sei eine monotone Folge von Umgebungen von $\overline{R}$ in Ω mit

$$U_1 > \overline{U}_2 > U_2 > \cdots > \overline{R}, \qquad \overline{R} = \bigcap_1^\infty U_n, \quad \text{z.B.}$$

$$U_n = U_n^0 = \left\{z; |\operatorname{Im} z| < \frac{1}{n} \vee |z| > n \vee z = \infty\right\}. \tag{1}$$

$\boldsymbol{HB}(U_n)$ sei der B-Raum der in U_n analytischen, in ∞ verschwindenden und auf $\overline{U}_n$ stetigen Funktionen mit der Norm

$$\|f\|_{U_n} = \sup_{z \in U_n} |f(z)| = \max_{z \in \overline{U}_n} |f(z)|; \qquad \boldsymbol{U}(U_n, \varepsilon_n) = \{f; \|f\|_{U_n} < \varepsilon_n\}. \tag{2}$$

Die Topologie $\mathcal{T}_H$ von $\boldsymbol{H}(\overline{R}) = \bigcup_1^\infty \boldsymbol{HB}(U_n)$ ist nun die feinste lokalkonvexe Topologie, die auf jedem $\boldsymbol{HB}(U_n)$ eine Topologie erzeugt, die gröber ist, als die dort durch (2) definierte Normtopologie. Sie wird erzeugt durch die Umgebungen

$$\boldsymbol{U}\{\varepsilon_n\} = \bigsqcap_1^\infty \boldsymbol{U}(U_n, \varepsilon_n) = \left\{f; f = \sum_1^m \alpha_j f_j, \sum |\alpha_j| \leqq 1, \|f_j\|_{U_j} < \varepsilon_j\right\}. \tag{3}$$

Diese Topologie ist unabhängig von der Folge $\{U_n\}$. Eine Menge von Funktionen aus $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist genau dann beschränkt, wenn sie in einem $\boldsymbol{HB}(U_n)$ enthalten und dort beschränkt ist.

b) $\mathcal{D}_{L^p} = \mathcal{D}_{L^p}(R)$ ist der Raum aller komplexwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)$, deren sämtliche Ableitungen zum Raume $L^p = L^p(R)$ gehören:

$$\varphi \in \mathcal{D}_{L^p} \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x)\right|^p dx < \infty, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Durch die Normen

$$\|\varphi\|_{p,k} = \left[\int \left|\frac{d^k\varphi}{dx^k}(x)\right|^p dx\right]^{1/p}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

wird in $\mathcal{D}_{L^p}$ eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}_{(p)}$ definiert. Ein volles Umgebungssystem wird gebildet durch die

$$\boldsymbol{V}_{p,n,\varepsilon} = \{\varphi; \|\varphi\|_{p,k} < \varepsilon \text{ für } k = 0, 1, \ldots n\}. \tag{6}$$

c) Eine Funktion $f(z) \in \boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist auf R beschränkt und geht für große z mindestens wie $M/|z|$ gegen Null, so daß die Einschränkung von $f(z)$ auf R zu $\mathcal{D}_{L^p}$ gehört für jedes $p > 1$. Da mit f auch alle Ableitungen zu $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ und damit zu L^p gehören, ist also $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ in $\mathcal{D}_{L^p}(R)$ enthalten. Durch Vergleich der Topologien erhalten wir:

Satz 1. *$\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist Teilraum von $\mathcal{D}_{L^p}(R)$, $p > 1$. Die Topologie $\mathcal{T}_H$ in $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist feiner als die durch $\mathcal{T}_{(p)}$ induzierte Topologie.*

[1]) Vgl. [1], [2], [5]. Dort wurde der Raum $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ mit $\mathfrak{A}(\overline{R})$ bezeichnet.

Zum Beweise benutzt man für $f \in \boldsymbol{U}(U_n, \delta)$ mit $U_n = U_n^0$ (vgl. (1)) nach der Cauchyschen Koeffizientenabschätzung

$$(7) \qquad \begin{cases} |f^{(\nu)}(x)| \leqq \delta \cdot n^\nu \nu! & \text{für } |x| < n+1 \\ |f^{(\nu)}(x)| \leqq \dfrac{\delta \cdot n \cdot \nu!}{(|x|-n)^{\nu+1}} & \text{für } |x| \geqq n+1. \end{cases}$$

Integration der p-ten Potenzen liefert dann $\boldsymbol{U}(U_n, \delta_n) < \boldsymbol{V}_{p,m,\varepsilon}$ mit geeignetem $\delta_n = \delta_n(m, \varepsilon) > 0$. Da $\boldsymbol{V}_{p,m,\varepsilon}$ absolut konvex ist, gilt dann auch

$$\boldsymbol{U}\{\delta_n\} = \bigsqcap_1^\infty \boldsymbol{U}(U_n, \delta_n) < \boldsymbol{V}_{p,m,\varepsilon}.$$

Satz 2. *$\boldsymbol{H}(\overline{R})$ ist in $\mathscr{D}_{L^p}$ dicht: Zu jedem $f \in \mathscr{D}_{L^p}$ gibt es eine Folge $f_j \in \boldsymbol{H}(\overline{R})$, die bezüglich $\mathscr{T}_{(p)}$ gegen f konvergiert.*

Zum Beweise genügt es, zu zeigen, daß jede beliebig oft differenzierbare Funktion φ mit kompaktem Träger durch Funktionen aus $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ approximierbar ist. Für ein solches φ ist die Fourier-Transformierte eine ganze analytische Funktion $\hat{\varphi}$ und es gilt die Umkehrformel:

$$(9) \qquad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(t) \exp(-2\pi i t x)\, dt.$$

Wir setzen

$$(10) \qquad \varphi_N(z) = \int_{-N}^{+N} \hat{\varphi}(t) \exp(-2\pi i t z)\, dt.$$

Durch Abschätzung der Fourier-Transformierten und ihrer Ableitungen zeigt man dann, daß $\|\varphi(x) - \varphi_N(x)\|_{p,k} \to 0$ geht für $N \to \infty$ für jedes natürliche k, d.h. $\varphi = \lim_{N\to\infty} \varphi_N$ bezüglich der Topologie $\mathscr{T}_{(p)}$. $\varphi_N(z)$ ist eine ganze analytische Funktion. Es gilt also in der Umgebung jedes endlichen Intervalls $(-A, +A)$ die Cauchysche Integralformel:

$$\varphi_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi_N(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Setzt man nun

$$(11) \qquad \varphi_{N,A}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-A-i}^{+A-i} \frac{\varphi_N(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{-A+i}^{+A+i} \frac{\varphi_N(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

so erhält man unter Ausnutzung der Eigenschaften der Fourier-Transformation die Abschätzung:

$$\|\varphi_N - \varphi_{N,A}\|_{p,k} \leqq M_k \cdot A^{-\frac{p-1}{p}},$$

so daß $\varphi_{N,A}$ für beliebiges $p > 1$ mit $A \to \infty$ gegen φ_N strebt im Sinne der Topologie $\mathscr{T}_{(p)}$. Da $\mathscr{D}_{L^p}$ ein F-Raum ist, kann man eine Diagonalfolge φ_{N_j, A_j} auswählen, die schon gegen φ konvergiert. (Im vorliegenden Fall genügt es, etwa $N_j = j$, $A_j = j^j$ zu setzen.) Aus Satz 1 und 2 folgt unmittelbar:

Korollar. *Ist t ein stetiges lineares Funktional in $\mathscr{D}_{L^p}$, so induziert es ein stetiges lineares Funktional t_0 in $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ und ist durch t_0 eindeutig bestimmt.*

2. Die zu $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ und $\mathcal{D}_{L^p}(R)$ dualen Räume

Der zu $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ duale Raum ist nach G. Köthe [1] isomorph zum Raum $\boldsymbol{H}(\complement\overline{R})$ der in der oberen und unteren Halbebene holomorphen Funktionen. Die Isomorphie ist gegeben durch

$$(12)\quad \begin{cases} u \to \tilde{u}(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi i}\, u\left[\dfrac{1}{z-\zeta}\right], \quad \operatorname{Im}\zeta \neq 0, \quad \tilde{u}(\zeta) = \begin{cases} \tilde{u}_+(\zeta), & \operatorname{Im}\zeta > 0 \\ \tilde{u}_-(\zeta), & \operatorname{Im}\zeta < 0 \end{cases} \\ u[f] = \displaystyle\int_{C_+} \tilde{u}_+(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta + \int_{C_-} \tilde{u}_-(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \qquad f \in \boldsymbol{H}(\overline{R}). \end{cases}$$

$\tilde{u}$ nennt man die Indikatrix von u.

Dabei sind C_+ bzw. C_- geschlossene Kurven in oberer bzw. unterer Halbebene, die bei entgegengesetzter Orientierung gemeinsam ein unbeschränktes Gebiet beranden in dem f holomorph ist.

Für $\tilde{u}_+, \tilde{u} \in \boldsymbol{H}(\overline{R})$ sind diese Funktionale völlig durch die Randwerte dieser Funktionen auf der reellen Achse bestimmt, weswegen man allgemein die stetigen Funktionale u auf $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ als Randverteilungen der Funktionen $\tilde{u}_\pm$ bezeichnet.

Die stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}_{L^p}$ sind Distributionen u (vgl. Schwartz [4], S. 55ff.), welche also zugleich Randverteilungen analytischer Funktionen $\tilde{u}(\zeta) \in \boldsymbol{H}(\complement\overline{R})$ sind. Aus der Tatsache, daß u als stetiges Funktional auf einer Nullumgebung von $\mathcal{D}_{L^p}$ beschränkt ist, ergibt sich eine Wachstumsbeschränkung der Funktionen $\tilde{u}(\zeta)$ bei Annäherung an die reelle Gerade:

Satz 3. *Ist $\tilde{u}(\zeta)$ eine in der oberen und unteren Halbebene holomorphe Funktion, die als Randverteilung eine auf $\mathcal{D}_{L^p}$ stetige Distribution besitzt, so wächst $\tilde{u}$ langsam bei Annäherung an die reelle Achse in folgendem Sinne: $\tilde{u}(\zeta)$ genügt einer Abschätzung*

$$(13)\quad |\tilde{u}(\zeta)| \leqq M \sup\left\{\eta^{+\frac{1}{p}-1}, \eta^{\frac{1}{p}-n}\right\}, \qquad \eta = |\operatorname{Im}\zeta|.$$

Beweis. u bildet eine Umgebung $\boldsymbol{V}_{p,m,\varepsilon}$ in den Einheitskreis ab; also gilt

$$(14)\quad |\tilde{u}(\zeta)| = \frac{1}{2\pi}\left|u\left[\frac{1}{x-\zeta}\right]\right| \leqq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sup_{0\leqq k\leqq m} \left\|\frac{1}{x-\zeta}\right\|_{p,k},$$

also

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sup_{0\leqq k\leqq m}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k!)^p\, dx}{|x-\zeta|^{(k+1)p}}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x-\zeta|^r} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\eta^2)^{r/2}} \leqq \frac{2}{\eta^{r-1}}\left(1+\frac{1}{r-1}\right),$$

also

$$(15)\quad |\tilde{u}(\zeta)| \leqq \frac{1}{2\pi\varepsilon} \sup_{0\leqq k\leqq m}\left\{k!\left(2+\frac{2}{kp+p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \eta^{\frac{1}{p}-k-1}\right\}.$$

Das ist aber gerade die behauptete Abschätzung mit $n=m+1$. Nun gilt weiter, daß jede der Abschätzung (13) genügende „langsam wachsende" Funktion als Randverteilung eine Distribution besitzt.

Satz 4. *Sei $\tilde{u}(\zeta)$ eine in $\mathfrak{C}\overline{R}$ holomorphe Funktion, die der Abschätzung* (13) *genügt. Dann ist die Randverteilung von $\tilde{u}$ die m-te Ableitung einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ die einer Abschätzung $|\varphi(x)| \leqq M'(1+|x|^{m-\delta})$ genügt und zu jedem x_0 ein Polynom höchstens $(m-1)$-ten Grades $p_{x_0}(x)$ existiert, so daß*

$$|\varphi(x) - p_{x_0}(x)| \leqq M'(1+|x-x_0|^{m-\delta}) \tag{16}$$

gilt[2]. *Dabei ist $m \geqq n$, $\delta = \frac{p-1}{p}$.*

Beweis. Wir betrachten die Komponente $\tilde{u}_-$ von $\tilde{u}$ in der unteren Halbebene. (Für $\tilde{u}_+$ verlaufen die Überlegungen ganz analog.)

Das durch $\tilde{u}_-(\zeta)$ bestimmte Funktional u_- wird gegeben durch

$$u_-[f] = -\int_{C_-} \tilde{u}_-(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta; \qquad f \in \boldsymbol{H}(\overline{R}), \tag{17}$$

wobei C_- eine geschlossene Kurve ist, welche den Bereich der unteren Halbebene in dem f nicht definiert ist, im Uhrzeigersinne umläuft. Wir wählen C_- speziell so, daß sie aus der Strecke $s=[-a-i\varepsilon, b-i\varepsilon]$ und einem Kreisbogen K vom Radius $\frac{a+b}{2}$ besteht. Da für große ζ gilt $|f(\zeta)| \leqq \frac{M_f}{|\zeta|}$, folgt wegen (13)

$$\left|\int_K \tilde{u}_-(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta\right| \leqq \int_K \frac{M \cdot M_f}{\eta^{\delta} \cdot |\zeta|}\, |d\zeta|, \qquad \delta = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} > 0. \tag{18}$$

Das zweite Glied geht aber mit $a, b \to \infty$ gegen 0, so daß wir erhalten

$$u_-[f] = -\int_{-\infty - i\varepsilon}^{+\infty - \varepsilon i} \tilde{u}_-(\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta = -\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_-(\zeta - i\varepsilon) \cdot f(\zeta - i\varepsilon)\, d\zeta. \tag{19}$$

Dieses Integral formen wir um durch partielle Integration und schätzen dazu zunächst das Integral von $\tilde{u}_-$ ab.

$$\tilde{u}_-^{(-1)}(\zeta; \xi_0) = \int_{\xi_0 - i}^{\zeta} \tilde{u}_-(\zeta)\, d\zeta; \qquad \zeta = \xi - i\eta. \tag{20}$$

Wählen wir den Integrationsweg $\xi_0 - i \to \xi_0 - i\varrho \to \xi - i\varrho \to \xi - i\eta = \zeta$ mit $\varrho = \mathrm{Max}\{1, |\xi - \xi_0|\}$, so erhalten wir für $\eta \leqq 1$

$$|\tilde{u}_-^{(-1)}(\zeta, \xi_0)| \leqq M_1 \{|\xi - \xi_0|^{1-\delta} + 1 + \eta^{1-\delta-(n-1)}\}. \tag{21}$$

Mit dem Integrationsweg $\xi_0 - i \to \xi - i \to \xi - i\eta = \zeta$ zeigt man dann durch Induktion, daß die iterierten Integrale $\tilde{u}_-^{(-k)}(\zeta; \xi_0) = \int_{\xi_0 - i}^{\zeta} \tilde{u}_-^{(-k+1)}(\zeta, \xi_0)\, d\zeta$ der

[2]) Man kann leicht zeigen, daß für jede stetige Funktion $\varphi(x)$, die (16) genügt, auch die Ableitung $u = \varphi^{(m)}$ (im Sinne der Distributionstheorie) Randverteilung einer gemäß (13) langsam wachsenden holomorphen Funktion $\tilde{u}(\zeta)$ in $\mathfrak{C}\overline{R}$ ist.

Abschätzung genügen:

$$|\tilde{u}_-^{(-k)}(\zeta, \xi_0)| \leqq M_k\{|\xi - \xi_0|^{k-\delta} + \sum_0^{k-1} |\xi - \xi_0|^\nu + \eta^{1-\delta-(n-k)}\}. \tag{22}$$

Für $k=n$ ergibt sich

$$|\tilde{u}_-^{(-n)}|(\zeta; \xi_0)| \leqq M_n'\{|\xi - \xi_0|^{n-\delta} + 1\} \quad \text{in} \quad 0 < \eta \leqq 1 \tag{23}$$

und $\tilde{u}_-^{(-n)}(\zeta, \xi_0)$ ist auf die reelle Gerade noch stetig fortsetzbar. M_n' hängt dabei nicht von dem Anfangspunkt ξ_0 ab. Aus (19) erhalten wir nun durch partielle Integration

$$\left\{\begin{aligned} u_-[f] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_-(\zeta - i\varepsilon) f(\zeta - i\varepsilon)\, d\zeta = (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_-^{(-n)}(\zeta, \xi_0) f^{(n)}(\zeta)\, d\zeta \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\,0, \xi_0) f^{(n)}(x)\, dx \end{aligned}\right. \tag{24}$$

und analog $u_+[f] = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_+^{(-n)}(x + i\,0, \xi_0) f^{(n)}(x)\, dx$, also

$$u[f] = u_+[f] + u_-[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varphi_n(x, \xi_0) f^{(n)}(x)\, dx \tag{25}$$

mit

$$\varphi_n(x, \xi_0) = \tilde{u}_+^{(-n)}(x + i\,0; \xi_0) - \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\,0; \xi_0). \tag{26}$$

Da $\varphi_n(x; \xi_0) - \varphi_n(x, \xi_0')$ ein Polynom höchstens $(n-1)$-ten Grades ist, folgt die Behauptung des Satzes.

Setzt man $u_{\pm\varepsilon}(x) = \tilde{u}_\pm(x \pm i\varepsilon; \xi_0)$, so ist

$$\varphi_{n,\varepsilon}(x) = u_{+\varepsilon}^{(-n)}(x) - u_{-\varepsilon}^{(-n)}(x) = \tilde{u}_+^{(-n)}(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\varepsilon) \tag{27}$$

eine analytische Funktion auf R und

$$u_\varepsilon[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varphi_{n,\varepsilon}(x) f^{(n)}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{u}_+(x + i\varepsilon) - \tilde{u}_-(x - i\varepsilon)\} f(x)\, dx \tag{28}$$

konvergiert stark gegen $u[f]$:

$$\left\{\begin{aligned} |u_-[f] - u_{-,\varepsilon}[f]| &= |\int \{\tilde{u}_-^{(-n-1)}(x - i\,0) - \tilde{u}^{(-n-1)}(x - i\varepsilon)\} f^{(n+1)}(x)\, dx| \\ &\leqq \varepsilon \int |\tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\varepsilon\vartheta_x) f^{(n+1)}(x)\, dx| \\ &\leqq \varepsilon \int M_n' (1 + |x|)^{n-\delta} |f^{(n+1)}(x)|\, dx. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Da sich $\tilde{u}_\pm^{(-n)}(x - i\eta) = \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\eta; 0)$ in dem ganzen Streifen $0 \leqq \eta \leqq \varepsilon$ durch $M_n'(|x|^{n-\delta} + 1)$, $f^{(n+1)}(x)$ für alle f aus einer beliebigen beschränkten Menge B in $H(\bar{R})$ durch $M_B \cdot \inf\{1, |x|^{-n-2}\}$ abschätzen läßt, geht $u_\pm[f] - u_{\pm,\varepsilon}[f]$ mit $\varepsilon \to 0$ auf jeder beschränkten Menge $B \subset H(\bar{R})$ gleichmäßig gegen Null. Aus (29) folgt auch unmittelbar, daß $u - u_\varepsilon$ auf jeder beschränkten Menge B aus dem Raum $\mathcal{D}$ (den beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger) [vgl. [3], Chap. III, Th. IV, S. 70] gleichmäßig gegen Null geht. Wir haben damit bewiesen:

Satz 5. *Ist u Randverteilung einer gemäß (13) langsam wachsenden holomorphen Funktion $\tilde{u}(\zeta)$, so konvergieren die u_ε, die durch*

$$u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_+(x + i\,\varepsilon) - \tilde{u}_-(x - i\,\varepsilon)$$

definiert sind, mit $\varepsilon \to 0$ gegen u im Sinne der starken Topologie des zu $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ dualen Raumes und im Sinne der starken Topologie des Raumes $\mathscr{D}'$ der Distributionen auf R und u_ε läßt sich darstellen in der Form

$$(30)\quad \begin{cases} u_\varepsilon[f] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{u}_+(x + i\,\varepsilon) - \tilde{u}_-(x - i\,\varepsilon)\} f(x)\,dx \\ \qquad = (-1)^n \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \{\tilde{u}_+^{(-n)}(x + i\,\varepsilon) - \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\,\varepsilon)\} f^{(n)}(x)\,dx, \\ u[f] = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon[f] \\ \qquad = (-1)^n \int \{\tilde{u}_+^{(-n)}(x + i\,0) - \tilde{u}_-^{(-n)}(x - i\,0)\} f^{(n)}(x)\,dx. \end{cases}$$

Wir wollen nun die Randverteilungen, die zu $(\mathscr{D}_{L^p})'$ gehören, genauer charakterisieren und beginnen dazu mit der Untersuchung derjenigen holomorphen Funktionen, welche eine Funktion aus L^q als Randverteilung haben. Sei

$$g \in L^q(R), \qquad \tilde{g}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int g(x) \frac{1}{x - \zeta}\,dx, \qquad 1 < q < \infty.$$

Da g auf $\mathscr{D}_{L^p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ein stetiges lineares Funktional definiert, ist $\tilde{g}(\zeta)$ eine in $\complement\overline{R}$ holomorphe Funktion, die der Abschätzung (13) (mit $n = 1$) genügt.

Für die ε-Näherung $g_\varepsilon(x) = \tilde{g}_+(x + i\,\varepsilon) - \tilde{g}_-(x - i\,\varepsilon)$ gilt

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int g(y) \left[\frac{1}{y - x - i\,\varepsilon} - \frac{1}{y - x - i\,\varepsilon} \right] dy = \frac{\varepsilon}{\pi} \int g(y) \frac{1}{(x - y)^2 + \varepsilon^2}\,dy,$$

also

$$g_\varepsilon = g * h_\varepsilon \quad \text{mit} \quad h_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{t^2 + \varepsilon^2}.$$

Es ist

$$\|h_\varepsilon\|_{L^1} = \frac{\varepsilon}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \varepsilon^2} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} = 1,$$

also $g_\varepsilon \in L^q$ und $\|g_\varepsilon\|_{L^q} \leqq \|g\|_{L^q} \cdot \|h_\varepsilon\|_{L^1} = \|g\|_{L^q}$.

Die Abbildungen $T_\varepsilon : g \to g_\varepsilon$ sind also stetige lineare Abbildungen von L^q in sich mit Norm $\|T_\varepsilon\| \leq 1$. (Die T_ε, $\varepsilon > 0$, bilden offenbar eine einparametrige Halbgruppe.)

Für $1 < q < \infty$ ist $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ in L^q dicht (da $\mathscr{D}_{L^q}$ in L^q dicht ist) und für $f \in \boldsymbol{H}(\overline{R})$ gilt:

$$f = f_+ - f_-, \qquad f_\pm \in \boldsymbol{H}(\overline{R} \cup \{\operatorname{Im}\zeta \gtrless 0\}),$$

$$f(x) - f_\varepsilon(x) = \{\tilde{f}_+(x) - \tilde{f}_+(x + i\,\varepsilon)\} - \{\tilde{f}_-(x) - \tilde{f}_-(x - i\,\varepsilon)\},$$

$$\tilde{f}_+(x) - \tilde{f}_+(x + i\,\varepsilon) = -i\,\varepsilon\,\tilde{f}_+'(x + i\,\varepsilon\,\vartheta_x), \qquad 0 < \vartheta_x < 1,$$

und

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L^q}^q = \varepsilon^q \int |\tilde{f}'_+(x + i\,\varepsilon\,\vartheta_x) - \tilde{f}'_-(x - i\,\varepsilon\,\vartheta'_x)|^q\, dx.$$

Nun gilt für $\tilde{f}'(z)$ aber in einem Streifen $|\operatorname{Im} z| < \delta$ eine Abschätzung

$$|f'_\pm(z)| \leqq M(1 + |z|^2)^{-1} \leqq M(1 + x^2)^{-1},$$

also

$$\|f_+(x) - f_{+\varepsilon}(x)\|_{L^q} \leqq 2\,\varepsilon \left[\int M^q (1 + x^2)^{-q}\, dx\right]^{1/q} = O(\varepsilon).$$

Da für $f_-(x) - f_{-\varepsilon}(x)$ die gleiche Abschätzung gilt, folgt $\|f - f_\varepsilon\|_{L^q} \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ für jedes $f \in \boldsymbol{H}(\bar{R})$. Aus dem Satz von Banach-Steinhaus folgt also $\|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \to 0$ mit $\varepsilon \to 0$ für jedes $g \in L^q$.

Damit haben wir

Satz 6. *Für $g \in L^q$, $0 < q < 1$, gilt*

$$(\alpha) \qquad |\tilde{g}(x \pm i\,y)| \leqq \frac{p}{\pi} \frac{\|g\|_{L^q}}{y^{1/p}} = \frac{M}{y^{1/p}}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$(\beta) \qquad \{g_\varepsilon(x) = \tilde{g}_+(x + i\,\varepsilon) - \tilde{g}_-(x - i\,\varepsilon);\ \varepsilon > 0\}$$

ist eine beschränkte Menge in L^q, $(\|g_\varepsilon\|_{L^q} \leqq \|g\|_{L^q})$,

$$(\gamma) \qquad \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \to 0 \quad \textit{mit} \quad \varepsilon \to 0.$$

Die Bedingungen (α) und (β) sind hinreichend dafür, daß $\tilde{g}$ eine Funktion aus L^q als Randverteilung hat.

Denn nach Satz 5 konvergieren die $g_\varepsilon(x)$ wegen (α) in $\mathscr{D}'$ stark (also auch schwach) gegen eine Distribution u.

Wegen (β) ist aber die Menge der g_ε in L^q relativ schwach kompakt, es gibt also eine Folge $\varepsilon_\nu \to 0$, derart, daß g_{ε_ν} in L^q schwach konvergiert gegen ein $g \in L^q$. Da aus schwacher Konvergenz in L^q aber schwache Konvergenz in $\mathscr{D}'$ folgt, muß $u = g$ sein.

Nun können wir eine genaue Charakterisierung der holomorphen Funktionen geben, welche Distributionen aus $(\mathscr{D}_{L^p})'$ als Randverteilungen haben.

Satz 7. *Jede Distribution $u \in (\mathscr{D}_{L^p})'$, $1 < p < \infty$, ist Randverteilung einer holomorphen Funktion $\tilde{u}(\zeta)$, für die gilt:*

(a) $|\tilde{u}(\zeta)| \leqq M \sup\left(\eta^{-\frac{p-1}{p}}, \eta^{-n+\frac{1}{p}}\right), \qquad \eta = |\operatorname{Im} \zeta|,$

(b) $u_\varepsilon(x) = \tilde{u}_+(x + i\,\varepsilon) - \tilde{u}_-(x - i\,\varepsilon) \in (\mathscr{D}_{L^p})'$, $\{u_\varepsilon;\ \varepsilon > 0\}$ *ist beschränkt in* $(\mathscr{D}_{L^p})'$

(c) $u_\varepsilon \to u$ *im Sinne der starken Topologie von* $(\mathscr{D}_{L^p})'$.

Beweis. u ist endliche Summe von Ableitungen von Funktionen aus L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $u = \sum_0^m g_\nu^{(\nu)}$, $g_\nu \in L^q$

$$\tilde{u}(\zeta) = \sum_0^m \frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}\, \tilde{g}_\nu(\zeta)$$

$$u_\varepsilon(x) = \sum_0^m \frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}\, g_{\nu,\varepsilon}(x).$$

Nach Satz 6 gilt $g_{\nu,\varepsilon} \in L^q$, also $u_\varepsilon \in (\mathscr{D}_{L^p})'$ und $g_{\nu,\varepsilon} \to g_\nu$ in starker Topologie von L^q, also auch in der starken Topologie von $(\mathscr{D}_{L^p})' > L^q$. Da die Differentiation in $\mathscr{D}_{L^p}$ und damit in $(\mathscr{D}_{L^p})'$ stetig ist, folgt auch $u_\varepsilon \to u$ in der starken Topologie von $(\mathscr{D}_{L^p})'$.

Satz 8. *Jede holomorphe Funktion $\tilde{u}(\zeta)$, für die die Bedingungen* (a) *und* (b) *aus Satz 7 erfüllt sind, hat als Randverteilung eine Distribution $u \in (\mathscr{D}_{L^p})'$.*

Beweis. Wegen (a) konvergiert u_ε in $\mathscr{D}'$ schwach gegen eine Distribution u.

$\mathscr{D}_{L^p}$ ist ein reflexiver F-Raum. In $\mathscr{D}_{L^p}$ und $(\mathscr{D}_{L^p})'$ sind also alle beschränkten Mengen relativ schwach kompakt.

Wegen (b) kann man also eine Folge $\varepsilon_j \to 0$ finden, so daß u_{ε_j} in $(\mathscr{D}_{L^p})'$, also auch in $\mathscr{D}'$ gegen eine Element aus $(\mathscr{D}_{L^p})'$ konvergiert (schwach), also gilt $u \in (\mathscr{D}_{L^p})'$ und Satz 7 zeigt, daß $u_\varepsilon \to u$ sogar stark konvergiert.

Für den Fall $p = 2$ sind weitere Aussagen möglich.

Satz 9. *L^2 besitzt eine orthogonale Zerlegung $L^2 = L^2_+ \oplus L^2_-$, wobei L^2_+ aus Randverteilungen von holomorphen Funktionen in der oberen, L^2_- aus Randverteilungen von holomorphen Funktionen in der unteren Halbebene besteht. Insbesondere gilt für jedes $g \in L^2$*

$$g = g_+ - g_-, \qquad g_+ \in L^2_+, \qquad g_- \in L^2_-$$
$$\tilde{g}_+(x + i\varepsilon) \to g_+(x), \qquad \tilde{g}_-(x - i\varepsilon) \to g_-(x)$$

mit $\varepsilon \to 0$ im Sinne der Normtopologie von L^2. $L^2_\pm$ besteht aus allen Funktionen, die die Fourier-Transformierten von Funktionen mit Trägern in der positiven bzw. negativen Halbgeraden sind.

Beweis. Für g aus dem in L^2 dichten Teilraum $\boldsymbol{H}(\overline{R})$ gilt $g(z) = g_+(z) - g_-(z)$, wobei g_+ bzw. g_- auf der abgeschlossenen oberen bzw. unteren Halbebene holomorph sind. Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_+(x)\,\overline{g_-(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_+(z)\,\overline{g_-(\bar{z})}\,dz = 0,$$

da der Integrand eine in der oberen Halbebene holomorphe Funktion ist, die für $|z| \to \infty$ wie $M/|z|^2$ gegen Null geht. Die Zerlegung $g = g_+ - g_-$ ist also eine orthogonale Zerlegung und $\|g\|^2 = \|g_+\|^2 + \|g_-\|^2$. Ist $\varphi = \lim g_j$ ein beliebiges Element aus L^2, $g_j \in \boldsymbol{H}(\overline{R})$, so gilt also $g_{j+} \to \varphi_+$, $g_{j-} \to \varphi_-$, wobei $\varphi_+, \varphi_- \in L^2$ und $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ gilt. Da starke Konvergenz in L^2 aber starke Konvergenz in $\boldsymbol{H}(\overline{R})'$ zur Folge hat, konvergieren die $\tilde{g}_{j\pm}(\zeta)$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}\overline{R}$ gleichmäßig gegen die Indikatrix von $\varphi_\pm$, d.h. φ_+, bzw. φ_- sind Randverteilungen von Funktionen aus der oberen bzw. unteren Halbebene.

Aus Satz 6 folgt dann $\tilde{\varphi}_+(x + i\varepsilon) \to \varphi_+(x)$ und $\tilde{\varphi}_-(x - i\varepsilon) \to \varphi_-$ im Sinne der L^2-Norm.

φ_+ geht bei der inversen Fourier-Transformation über in eine Funktion $\psi^+(y) = \int \varphi_+(z)\, e^{-2\pi i z y}\, dz$, die offenbar für $y < 0$ verschwindet, d.h. $\varphi_+ = \widehat{\psi^+}$ und analog $\varphi_- = \widehat{\psi^-}$, wobei $\psi^-(y)$ eine Funktion aus L^2 ist, die für $y > 0$ verschwindet.

Insbesondere ist also ψ^+ (bzw. ψ^-) Randverteilung einer holomorphen Funktion, die im Komplement von $[0, +\infty]$ (bzw. $[-\infty, 0]$) definiert ist und auf jeder Parallelen zur reellen Geraden quadratintegrabel ist.

Aus Satz 9 folgt eine analoge Zerlegung für die Räume $\mathscr{D}_{L^2}$ und $(\mathscr{D}_{L^2})'$:

Satz 10. *Es gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$\mathscr{D}_{L^2} = \mathscr{D}_{L^2_+} \oplus \mathscr{D}_{L^2_-}, \qquad (\mathscr{D}_{L^2})' = (\mathscr{D}_{L^2_+})' \times (\mathscr{D}_{L^2_-})' = (\mathscr{D}_{L^2})'_- \times (\mathscr{D}_{L^2})'_+,$$

wobei $\mathscr{D}_{L^2_\pm}$ aus Funktionen besteht, deren sämtliche Ableitungen in $L^2_\pm$ liegen. $(\mathscr{D}_{L^2_\pm})' = (\mathscr{D}_{L^2})'_\mp$ besteht aus Randverteilungen von holomorphen Funktionen in der offenen Halbebene $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$ *bzw.* $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$. *Für $g \in \mathscr{D}_{L^2}$ bzw. $u \in (\mathscr{D}_{L^2})'$ gehören die Komponenten $g_{\varepsilon\pm}$ zu $\mathscr{D}_{L^2_\pm}$ bzw. $u_{\varepsilon\pm}$ zu $(\mathscr{D}_{L^2})'_\pm$ und konvergieren im Sinne der Topologie von $\mathscr{D}_{L^2}$ bzw. der starken Topologie von $(\mathscr{D}_{L^2})'$ gegen $g_\pm$ bzw. $u_\pm$.*

Beweis. Aus $\mathscr{D}_{L^2} < L^2$ folgt nach Satz 9 die Zerlegung $g = g_+ - g_-$ mit $g_+ \in L^2_+$, $g_- \in L^2_-$ und es gilt $g_{\varepsilon,+} = g_{+,\varepsilon} \to g_+$, $g_{-,\varepsilon} = g_{\varepsilon,-} \to g_-$. Da die Indikatrix von $g^{(\nu)}(x)$ gleich $\tilde{g}^{(\nu)}(\zeta)$ ist, folgt, daß $g_+ \in \mathscr{D}_{L^2}$ und $g_- \in \mathscr{D}_{L^2}$, sowie daß $g_{\varepsilon,\pm} \to g_\pm$ konvergiert im Sinne der Topologie von $\mathscr{D}_{L^2}$. Da g_+ und g_- in L^2 zueinander orthogonal sind, ist die Zerlegung eindeutig und die Projektionen $P_\pm$: $g \to g_\pm$ sind stetig, $\mathscr{D}_{L^2}$ ist also die topologische direkte Summe von $\mathscr{D}_{L^2_+}$ und $\mathscr{D}_{L^2_-}$.

Für ein Funktional $u \in (\mathscr{D}_{L^2})'$ gilt die Darstellung $u = \sum_0^m g_\nu^{(\nu)}$ mit $g_\nu \in L^2$, also die Zerlegung $u = \sum_0^m g_{\nu+}^{(\nu)} - \sum_0^m g_{\nu-}^{(\nu)} = u_+ + u_-$. Dabei gilt für $f = f_+ - f_- \in \mathscr{D}_{L^2}$

$$u[f] = u_+[f] + u_-[f] = \lim_{\varepsilon \to 0} \{u_{+,\varepsilon}[f] + u_{-,\varepsilon}[f]\} = u_+[-f_-] + u_-[f_+],$$

also

$$(\mathscr{D}_{L^2_+})' = (\mathscr{D}_{L^2})'_-; \qquad (\mathscr{D}_{L^2_-})' = (\mathscr{D}_{L^2})'_+.$$

Aus $g_{\nu,\varepsilon,\pm} \to g_{\nu,\pm}$ im Sinne der L^2-Norm für $g_\nu \in L^2$ folgt, da die Differentiation in $(\mathscr{D}_{L^2})'$ stetig ist, $u_{\varepsilon,\pm} = u_{\pm,\varepsilon} \to u_\pm$ im Sinne der Topologie von $(\mathscr{D}_{L^2})'$. Da die Topologie von $\mathscr{D}_{L^2}$ feiner ist als die Topologie des Raumes $\mathscr{E} = C^\infty$ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen, folgt für $g \in \mathscr{D}_{L^2}$ insbesondere die gleichmäßige Konvergenz von $g_{\varepsilon,\pm}^{(\nu)}$ gegen $g_\pm^{(\nu)}$ auf jedem kompakten Intervall.

Satz 11. *Ist $g \in L^p$, $1 \leqq p < \infty$, so gilt: $g_\varepsilon(x) = \tilde{g}(x + i\varepsilon) - \tilde{g}(x - i\varepsilon)$ konvergiert mit $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $g(x)$ auf jedem kompakten Intervall, in dessen Umgebung $g(x)$ stetig ist.*

Beweis.

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left\{ \frac{1}{y - x - i\varepsilon} - \frac{1}{y - x + i\varepsilon} \right\} dy = \frac{\varepsilon}{\pi} \int g(y) \frac{dy}{(x-y)^2 + \varepsilon^2}.$$

Wir zerlegen den Integrationsbereich in $I_1 = \{y : |x - y| \geqq \delta\}$ und $I_2 = \{y : |x - y| \leqq \delta\}$, $0 < \varepsilon < \delta < 1$. Es ist

$$\frac{\varepsilon}{\pi} \int_{I_1} |g(y)| \frac{dy}{(x-y)^2 + \varepsilon^2} \leqq \frac{2\varepsilon}{\pi \cdot \delta^2} \|g\|_{L^p}$$

nach Hölderscher Ungleichung. In I_2 zerlegen wir $g(y)=g_1(y)+ig_2(y)$ in Real- und Imaginärteil und können dann den Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden:

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{I_2} g(y)\,\frac{dy}{(x-y)^2+\varepsilon^2} = \{g_1(x_1)+i\,g_2(x_2)\}\,\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{I_2}\frac{dy}{(x-y)^2+\varepsilon^2}$$

$$= \{g_1(x_1)+i\,g_2(x_2)\}\,\frac{1}{2\pi i}\left\{\oint\frac{dy}{y}-\int_{\delta-i\varepsilon}^{\delta+i\varepsilon}\frac{dy}{y}+\int_{-\delta-i\varepsilon}^{-\delta+i\varepsilon}\frac{dy}{y}\right\},\quad x_1, x_2\in I_2,$$

wobei das Kurvenintegral über das Rechteck

$$-\delta-i\varepsilon\to+\delta-i\varepsilon\to+\delta+i\varepsilon\to-\delta+i\varepsilon\to-\delta-i\varepsilon$$

zu erstrecken ist. Es ist

$$\int_{\pm\delta-i\varepsilon}^{\pm\delta+i\varepsilon}\left|\frac{dy}{y}\right|\leqq\frac{2\varepsilon}{\delta},$$

also mit einer Schranke M für $|g(y)|$ in $I_2=[x-\delta, x+\delta]$:

$$|g_\varepsilon(x)-g(x)|\leqq|g_1(x_1)-g_1(x)+i\,(g_2(x_2)-g_2(x))|+\frac{4\varepsilon M}{\pi\delta}+\frac{2\varepsilon}{\pi\delta^2}\|g\|_{L^p}.$$

Wir setzen nun etwa $\delta=\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ und erhalten

$$|g_\varepsilon(x)-g(x)|\leqq|g_1(x_1)-g_1(x)+i\,(g_2(x_2)-g_2(x))|+\frac{4M}{\pi}\cdot\varepsilon^{\frac{2}{3}}+\frac{2\|g\|_{L^p}}{\pi}\varepsilon^{\frac{1}{3}}.$$

Sei nun $I=[a, b]$ ein kompaktes Intervall in dessen Umgebung $g(x)$ stetig, also gleichmäßig stetig ist. Da $x_1, x_2\in U_\delta$, $U_\delta=(a-\delta, b+\delta)$ ist wird also für alle $x\in I$ für jedes $\varepsilon^*>0$ $|g_\varepsilon(x)-g(x)|<\varepsilon^*$ wenn nur $\varepsilon=\delta^3$ hinreichend klein gewählt ist. Ist insbesondere $g(x)$ in $(-\infty, +\infty)$ beschränkt und gleichmäßig stetig, so ergibt sich gleichmäßige Konvergenz von $g_\varepsilon(x)$ gegen $g(x)$ auf der ganzen reellen Geraden und nicht nur auf kompakten Teilintervallen. Das gilt also insbesondere dann, wenn $g(x)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger ist. (Der Satz wurde für den Fall stetiger Funktionen mit kompaktem Träger bewiesen in H. BREMERMANN-L. DURAND, [0]. Die Beweisführung konnte für den vorliegenden Fall von dort übernommen werden.)

3. Übertragung auf höhere Dimensionen

a) Es sei Ω^N der N-dimensionale Osgoodsche Raum (d.h. das N-fache kartesische Produkt der Zahlenkugel Ω), R^N der N-dimensionale reelle Zahlenraum und $\overline{R^N}=\overline{R}^N$ die abgeschlossene Hülle von R^N in Ω^N.

$\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ sei der topologische Vektorraum der lokalanalytischen Funktionen in $\overline{R^N}$, die in allen unendlichen Punkten ihres Definitionsbereiches verschwinden (vgl. [5]; dort wurde dieser Raum mit $\mathfrak{A}(\overline{R^N})$ bezeichnet). Die Topologie in $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ kann wieder durch (1) und (2) definiert werden, wenn man die Umgebungen U_n von $\overline{R}$ durch ihre N-fachen kartesischen Produkte U_n^N ersetzt, die dann eine Folge von Umgebungen von $\overline{R^N}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^N=\overline{R^N}$ bilden. Nach

[5] ist der zu $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ duale Raum isomorph dem Raum $\boldsymbol{H}((\Omega-\overline{R})^N)-\boldsymbol{H}((\mathbb{C}\overline{R})^N)$ der in $(\Omega-\overline{R})^N$ lokalanalytischen Funktionen. Die Isomorphie wird geliefert durch die Zuordnungen

$$\tilde{u}(\zeta)=(2\pi i)^{-N}u[(z_1-\zeta_1)^{-1}\cdots(z_N-\zeta_N)^{-1}],\qquad \zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_N),\qquad \zeta_j\notin\overline{R},$$
$$u[f]=\int_{C_1}\cdots\int_{C_N} f(\zeta)\,\tilde{u}(\zeta)\,d\zeta,\qquad f\in\boldsymbol{H}(\overline{R^N}).$$

Dabei ist C_j die negativ orientierte Berandung einer Umgebung U_j von $\overline{R}$, derart, daß f in $\overline{U}_1\times\cdots\times\overline{U}_N$ holomorph ist. Bei dieser Zuordnung entspricht die starke Topologie der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von $(\Omega-\overline{R})^N$.

Die offene Menge $(\Omega-\overline{R})^N$ hat 2^N Komponenten G_σ, $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)$, $\sigma_j=\pm1$, $G_\sigma=\{\zeta:\sigma_j\operatorname{Im}\zeta_j>0\}$, so daß $\tilde{u}(\zeta)\in\boldsymbol{H}\big((\Omega-\overline{R})^N\big)$ aus 2^N Komponenten $\tilde{u}_\sigma$ besteht, wobei $\tilde{u}_\sigma$ in G_σ definiert ist. Es gilt also eine Zerlegung

$$u[f]=\sum_\sigma u_\sigma[f];\qquad u_\sigma[f]=\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\int_{C_{\sigma_1}}\cdots\int_{C_{\sigma_N}} f(\zeta)\,\tilde{u}_\sigma(\zeta)\,d\zeta, \tag{33}$$

wobei C_{σ_j} eine geschlossene Kurve in $G_{\sigma_j}=\{\zeta_j:\sigma_j\operatorname{Im}\zeta_j>0\}$ ist, welche zur geschlossenen reellen Geraden $\overline{R}$ (mit üblicher Orientierung) homolog ist.

Haben die $\tilde{u}_\sigma$ stetige Randwerte auf R^N und verschwinden sie für $|\zeta|\to\infty$ (z.B. für $\tilde{u}_\sigma\in\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$), so kann man die Integrationswege auf den R^N verschieben und erhält:

$$\begin{cases} u[f]=\displaystyle\sum_\sigma\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\int_{R^N}\cdots\int f(x)\,\tilde{u}_\sigma(x+i\,0\,\sigma)\,dx \\ \qquad=\displaystyle\sum_\sigma\prod_{j=1}^{N}\sigma_j\int_{R^N}\cdots\int f(x)\lim_{\varepsilon\to0}\tilde{u}_\sigma(x+i\,\varepsilon\,\sigma)\,dx. \end{cases} \tag{34}$$

b) Der Raum $\mathscr{D}_{L^p}=\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ besteht (analog zum Fall $N=1$) aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)=\varphi(x_1,\ldots,x_N)$ deren sämtliche partiellen Ableitungen zu $L^p(R^N)$ gehören und die Topologie wird durch die Folge der Normen

$$\|\varphi\|_{p,k}=\Big[\int_{R^N}\cdots\int|D^k\varphi(x)|^p\,dx\Big]^{1/p};\qquad D^k=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{k_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_N}\Big)^{k_N}, \tag{35}$$

also durch die Nullumgebungen

$$V_{p,m,\varepsilon}=\{\varphi;\|\varphi\|_{p,k}<\varepsilon\ \text{für}\ |k|=k_1+\cdots+k_N\leqq m\} \tag{36}$$

erzeugt. ($\mathscr{D}_{L^p}$ ist also ein F-Raum.)

Ist $f\in\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ und ist $f(z)$ in $(\overline{U_n^0})^N$ (vgl. (1)) definiert und dort $|f(z)|\leqq\delta$, so liefert die Cauchysche Integralformel die Abschätzung

$$|f^{(k)}(x)|=|D^kf(x)|\leqq\delta\cdot\prod_{j=1}^{N}g_j(x_j)\ \text{mit}\ g_j(t)=\begin{cases} n^{k_j} & \text{für}\ |t|\leqq n+1 \\ \dfrac{n}{(|t|-n)^{k_j+1}} & \text{für}\ |t|>n+1 \end{cases},$$

woraus folgt ,daß $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ in $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ enthalten ist und die Injektion stetig ist.

In $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ ist der Raum $\mathscr{D}(R^N)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger dicht und in $\mathscr{D}$ wiederum den Teilraum $\mathscr{D}_0$ aller Funktionen $\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\prod_{j=1}^{N}\varphi_{j,\nu}(x_j)$, $\varphi_{j,\nu}\in\mathscr{D}(R)$. Nach Satz 2 können aber die Funktionen aus $\mathscr{D}_0$ im Sinne der Topologie von $\mathscr{D}_{L^p}$ durch Funktionen aus $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ approximiert werden. Wir haben also die Übertragung von Satz 1 und 2:

Satz 12. *$\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ ist ein dichter Teilraum von $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ und die Injektion $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})\to\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ ist stetig für $1<p<\infty$.*

Korollar. *Jedes stetige lineare Funktional u auf $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ induziert ein stetiges lineares Funktional auf $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ und ist durch dieses eindeutig bestimmt. u kann also als Randverteilung holomorpher Funktionen angesehen werden.*

Da u auf einer Umgebung $V_{p,m,\varepsilon}$ beschränkt ist, genügt die Indikatrix $\tilde{u}(\zeta)$ einer Abschätzung

$$|\tilde{u}(\zeta)|=\frac{1}{(2\pi)^N}\left|u\left[\frac{1}{z_1-\zeta_1}\cdot\frac{1}{z_2-\zeta_2}\cdots\frac{1}{z_N-\zeta_N}\right]\right|\leqq M\cdot\sup_{0\leqq|k|\leqq m}\left\|\frac{1}{z_1-\zeta_1}\cdots\frac{1}{z_N-\zeta_N}\right\|_{p,k}$$

$$\leqq M\sup_{|k|\leqq m}k!\prod_{j=1}^{N}\left[\int\frac{dx_j}{|x_j-\zeta_j|^{(k_j+1)p}}\right]^{1/p}\leqq M^*\sup_{|k|\leqq m}\prod_{j=1}^{N}\eta_j^{\frac{1}{p}-k_j-1}$$

also

$$|\tilde{u}(\zeta)|\leqq M^*\cdot\prod_{j=1}^{N}\left(\eta_j^{\frac{1}{p}-1}+\eta_j^{\frac{1}{p}-1-m}\right);\quad \eta_j=|\operatorname{Im}\zeta_j|,$$

in Verallgemeinerung von (13).

Hält man $(N-1)$ Variable fest, so hat man für die restliche Variable die Abschätzung (13). Indem man Satz 4 nacheinander auf die einzelnen Variablen $\zeta_1,\ldots,\zeta_N$ anwendet, erhält man also, daß nach endlich vielen Integrationen (etwa $m+1$ malige Integration nach jeder Variablen) $\tilde{u}_\sigma^{(-m_0e)}(\zeta)$ stetige Randwerte auf R^N hat, und für das Funktional u die Darstellung gilt:

$$u=\sum u_\sigma$$

$$u_\sigma[f]=\Pi\sigma_j\int_{R^N+i\varepsilon\sigma}\cdots\int f(\zeta)\,\tilde{u}_\sigma(\zeta)\,d\zeta=\Pi\sigma_j\int_{R^N+i\varepsilon\sigma}\cdots\int(-1)^{m_0N}f^{(m_0e)}(\zeta)\,\tilde{u}_\sigma^{(-m_0e)}(\zeta)\,d\zeta$$

$$=\Pi\sigma_j\int_{R^N}\cdots\int(-1)^{m_0N}f^{(m_0e)}(x)\,\tilde{u}_\sigma^{(-m_0e)}(x+i\,0\,\sigma)\,dx$$

und die Näherungen $u_{\varepsilon,\sigma}=u_{\sigma,\varepsilon}$ mit $\tilde{u}_{\sigma,\varepsilon}(\zeta)=\tilde{u}_\sigma(\zeta+i\varepsilon\sigma)$, $\zeta\in G_\sigma$ konvergieren gleichmäßig gegen u_σ auf allen beschränkten Mengen von $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ und auf allen beschränkten Mengen aus $\mathscr{D}(R^N)$. Damit haben wir die Übertragung von Satz 3, 4 und 5:

Satz 13. *Ist u ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$, so genügt die Indikatrix $\tilde{u}(\zeta)$ von u einer Abschätzung*

$$|\tilde{u}(\zeta)|\leqq M\prod_{1}^{N}\left(\eta_j^{\frac{1}{p}-1}+\eta_j^{\frac{1}{p}-1-m}\right),\quad \eta_j=|\operatorname{Im}\zeta_j|. \tag{38}$$

Jede holomorphe Funktion $\tilde{u}(\zeta)$, welche dieser Abschätzung genügt, hat nach einer endlichen Anzahl von Integrationen stetige Randwerte auf R^N und es gilt für das durch $\tilde{u}$ auf $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ definierte Funktional $u = \Sigma u_\sigma$,

$$u_\sigma[f] = \Pi\sigma_j \int\cdots\int_{R^N} (-1)^{m_0 N} f^{(m_0 e)}(x)\, \tilde{u}_\sigma^{(-m_0 e)}(x + i\,0\,\sigma)\, dx,$$

also mit $\varphi(x) = \sum_\sigma \Pi\sigma_j \tilde{u}_\sigma^{(-m_0 e)}(x + i\,0\,\sigma)$:

$$\begin{aligned} u[f] &= \int\cdots\int_{R^N} (-1)^{m_0 N} f^{(m_0 e)} \left\{\sum_\sigma \Pi\sigma_j \tilde{u}_\sigma^{(-m_0 e)}(x + i\,0\,\sigma)\right\} dx \\ &= \int\cdots\int_{R^N} (-1)^{m_0 e} f^{(m_0 e)}(x)\cdot\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

u kann also auch als Distribution und zwar als eine Ableitung der stetigen Funktion $\varphi(x)$ aufgefaßt werden. (Auf die genaue Charakterisierung der Funktionen $\varphi(x)$ verzichten wir, da wir sie im folgenden nicht benötigen.)

Die Näherungen u_ε mit $\tilde{u}_{\varepsilon,\sigma}(\zeta) = \tilde{u}_\sigma(\zeta + i\,\varepsilon\sigma)$ sind holomorphe Funktionen auf R^N, welche im Sinne der starken Topologie von $(\boldsymbol{H}(\overline{R^N}))'$ und der starken Topologie von $(\mathscr{D}(R^N))'$ gegen u konvergieren.

Die genaue Charakterisierung der Indikatrixfunktionen $\tilde{u}(\zeta)$ für $u \in (\mathscr{D}_{L^p})'$ bietet gegenüber dem Fall $N = 1$ keine neuen Probleme: Für $g \in L^q$ entsteht

$$g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma (\Pi\sigma_j)\, \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$$

aus $g(x)$ durch Faltung mit

$$h_\varepsilon^N(x) = \Pi h_\varepsilon(x_j) = \Pi\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\,\frac{1}{x_j^2 + \varepsilon^2}\right) \in L^1,$$

so daß $g_\varepsilon \in L^q$, $\|g_\varepsilon\|_{L^q} \leqq \|g\|_{L^q}$. Da wir für $g \in L^q < (\mathscr{D}_{L^p})'$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, im Beweis von (38) $m = 0$ setzen können, gilt $|\tilde{g}(\zeta)| \leqq M \prod_{j=1}^{N} \eta_j^{-\frac{1}{q}}$, $\eta_j = |\operatorname{Im}\zeta_j|$. Aus dem Beweis von Satz 6 folgt schließlich für Funktionen $f(z)$ aus dem algebraischen Tensorprodukt $\boldsymbol{H}(\overline{R_1}) \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{H}(\overline{R_N}) < \boldsymbol{H}(\overline{R^N})$, daß in $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$, also in $\mathscr{D}_{L^q}(R^N)$ und damit in $L^q(R^N)$ dicht liegt $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L^q} \to 0$, woraus nach dem Satz von Banach-Steinhaus diese Aussage für alle $f \in L^q$ folgt:

Satz 14. *Für $g \in L^q(R^N)$, $1 < q < \infty$ gilt:*

$$(\alpha) \qquad |\tilde{g}(x \pm i\,y)| \leqq M \cdot \prod_1^N y_j^{-\frac{1}{q}}.$$

$$(\beta) \qquad \left\{g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \Pi\sigma_j\, \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)\right\}_{\varepsilon > 0}$$

ist eine beschränkte Menge in L^q, $(\|g_\varepsilon\|_{L^q} \leqq \|g\|_{L^q})$, $g_\varepsilon(x)$ ist holomorph in R^N.

$$(\gamma) \qquad \|g - g_\varepsilon\|_{L^q} \to 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon \to 0.$$

Die Bedingungen (α) und (β) sind hinreichend dafür, daß $\tilde{g}(\zeta) \in \boldsymbol{H}((\Omega - \overline{R})^N)$ eine Funktion aus L^q als Randverteilung hat.

Denn nach Satz 13 folgt aus (α), daß g_ε in $\mathscr{D}'$ stark, also auch schwach gegen eine Distribution u konvergiert. Wegen (β) ist aber die Menge der g_ε relativ schwach kompakt in L^q, d.h. $u = g \in L^q$ und $\tilde{g}$ ist die Indikatrix von g.

Daraus folgt dann insbesondere auch (γ).

Die Charakterisierung der Funktionen aus $\mathscr{D}_{L^q}(R^N)$ ist dann evident.

Da jedes stetige lineare Funktional $u \in (\mathscr{D}_{L^p})'$ als endliche Summe von Ableitungen von Funktionen aus $L^q(R^N)$ dargestellt werden kann, folgt auch leicht

Satz 15. *Jede Distribution* $u \in (\mathscr{D}_{L^p}(R^N))'$, $1 < p < \infty$, *ist Randverteilung einer holomorphen Funktion* $\tilde{u}(\zeta) \in \boldsymbol{H}((\Omega - \overline{R})^N)$, *für die gilt:*

(a) $|\tilde{u}(\zeta)| \leqq M \cdot \prod_1^N \left(\eta_j^{-\frac{1}{q}} + \eta_j^{-\frac{1}{q}-m}\right)$, $\eta_j = |\operatorname{Im} \zeta_j|$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(b) $\left\{u_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \Pi\, \sigma_j \tilde{u}_\sigma(x + i\varepsilon\sigma)\right\}_{\varepsilon > 0}$ *ist beschränkt (also relativ schwach kompakt) in* $(\mathscr{D}_{L^p}(R^N))'$.

(c) $u_\varepsilon \to u$ *im Sinne der starken Topologie von* $(\mathscr{D}_{L^p})'$ *mit* $\varepsilon \to 0$.

Jede holomorphe Funktion $\tilde{u}(\zeta)$, *für die* (a) *und* (b) *gilt, ist die Indikatrix einer Distribution aus* $(\mathscr{D}_{L^p}(R^N))'$.

Die Schlußweise ist genau analog zu den Beweisen von Satz 7 und 8, da auch $\mathscr{D}_{L^p}(R^N)$ ein reflexiver F-Raum ist.

Für $f \in \boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ ist die Zerlegung $f = \Sigma f_\sigma$, $f_\sigma(x) = \Pi \sigma_j \tilde{f}_\sigma(x + i\,0\sigma)$ eine Zerlegung in paarweise orthogonale Komponenten, da für $\sigma_j \neq \sigma_j'$ gilt

$$\int_{R_j} f_\sigma(x)\, \overline{g_{\sigma'}(x)}\, dx_j = \int_{R_j} f_\sigma(z)\, \overline{g_{\sigma'}(\bar{z})}\, dz_j = 0,$$

da der Integrand in der Halbebene $\sigma_j \cdot \operatorname{Im} \zeta_j \geqq 0$ holomorph ist und im Unendlichen eine zweifache Nullstelle hat. Da $\boldsymbol{H}(\overline{R^N})$ in $L^2(R^N)$ dicht ist, gilt auch für alle $g \in L^2$ die orthogonale Zerlegung

$$g = \Sigma g_\sigma, \qquad g_\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} g_{\varepsilon,\sigma}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$$

(Konvergenz im Sinne der L^2-Norm).

Satz 16. $L^2(R^N)$ *besitzt die orthogonale Zerlegung* $L^2 = \sum_\sigma \oplus L^2_\sigma$, *wobei* L^2_σ *aus allen Funktionen aus* L^2 *besteht, welche Randverteilungen von holomorphen Funktionen* $\tilde{u}_\sigma$ *in* G_σ *sind. Für jedes* $g \in L^2$ *gilt also* $g = \Sigma g_\sigma$, *wobei* $g_\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$ *(Limes im Sinne der Normtopologie) aus* L^2_σ *ist.* L^2_σ *besteht aus den Fourier-Transformierten von Funktionen* $\psi^\sigma \in L^2$, *deren Träger in dem Bereich* $\{x;\ \sigma_j x_j \geqq 0,\ j = 1, \ldots, N\}$ *liegt.*

Die Aussage über die Fourier-Transformationen läßt sich auf die eindimensionale Fourier-Transformation zurückführen und folgt dann aus Satz 9.

Aus der Zerlegung von L^2 folgt wieder unmittelbar

Satz 17. *Es gilt die direkte topologische Zerlegung*

$$\mathscr{D}_{L^2}(R^N) = \sum_\sigma \mathscr{D}_{L^2_\sigma}(R^N); \qquad (\mathscr{D}_{L^2}(R^N))' = \prod_\sigma (\mathscr{D}_{L^2_\sigma}(R^N))' = \prod_{-\sigma} (\mathscr{D}_{L^2}(R^N))'_{-\sigma},$$

wobei $\mathscr{D}_{L^2_\sigma}$ aus den Funktionen besteht, deren sämtliche Ableitungen in L^2_σ liegen, $(\mathscr{D}_{L^2})'_\sigma$ besteht aus denjenigen Funktionalen u auf $\mathscr{D}_{L^2}$, deren Indikatrix $\tilde{u}(\zeta)$ nur in G_σ von Null verschieden ist. Der zu $\mathscr{D}_{L^2_\sigma}$ duale Raum ist der Raum $(\mathscr{D}_{L^2})'_{-\sigma}$. Die Zerlegungen $g = \Sigma g_\sigma \in \mathscr{D}_{L^2}$ bzw. $u = \{u_\sigma\} \in (\mathscr{D}_{L^2})'$ sind gegeben durch

$$g_\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma), \qquad u_\sigma(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{u}_\sigma(x + i\,\varepsilon\,\sigma),$$

wobei die Konvergenz im Sinne der starken Topologie von $\mathscr{D}_{L^2}$ bzw. $(\mathscr{D}_{L^2})'$ erfolgt.

Für $g \in \mathscr{D}_{L^p}$ folgt aus der Konvergenz der Näherungen g_ε gegen g im Sinne der Topologie von $\mathscr{D}_{L^p}$ insbesondere die gleichmäßige Konvergenz von $g_\varepsilon(x)$ gegen $g(x)$ auf allen kompakten Intervallen.

Allgemeiner gilt:

Satz 18. *Ist $g \in L^p(R^N)$, $1 \leqq p < \infty$, so gilt: $g_\varepsilon(x) = \sum_\sigma \Pi \sigma_j \tilde{g}_\sigma(x + i\,\varepsilon\sigma)$ konvergiert gleichmäßig gegen $g(x)$ auf jedem kompakten Bereich, in dessen Umgebung $g(x)$ stetig ist.*

Beweis. Es genügt die gleichmäßige Konvergenz zu beweisen auf allen kompakten Quadern in deren Umgebung $g(x)$ stetig ist. Es sei

$$(x|y_\nu) = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}\, y_\nu, x_{\nu-1}, \ldots, x_N), \qquad h_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{\pi}\,\frac{1}{t^2 + \varepsilon^2}$$

$$g_{(\varepsilon),1}(x) = \int g\,(x|y_1)\, h_\varepsilon(x_1 - y_1)\, d\,y_1$$

$$g_{(\varepsilon),\nu+1}(x) = \int g_{(\varepsilon),\nu}(x|y_{\nu+1})\, h_\varepsilon(x_{\nu+1} - y_{\nu+1})\, d\,y_{\nu+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, N-1,$$

also

$$g_\varepsilon(x) = g_{(\varepsilon),N}(x).$$

Dann ist mit $g(x) = g_{(\varepsilon),0}(x)$

$$g_\varepsilon(x) - g(x) = \sum_1^N (g_{(\varepsilon),\nu} - g_{(\varepsilon)\nu-1}).$$

Es genügt also, die gleichmäßige Konvergenz von $g_{(\varepsilon),\nu}(x) - g_{(\varepsilon),\nu-1}(x)$ gegen Null zu zeigen, d.h. die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 11 und seinem Beweis, da die $g_{(\varepsilon),\nu}$ in den Quadern Q, in denen $g(x)$ stetig ist, gleichmäßig beschränkt und gleichstetig sind.

Literatur

[0] Bremermann, H. J., and L. Durand III.: On analytic continuation, multiplication and Fourier-transforms of Schwartz-distributions. Forschungsbericht, Institut for Advanced Study, Princeton N. J., Mai 1959. Erscheint in Trans. Amer. Math. Soc.

[1] Köthe, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 30—49 (1953).

[2] Köthe, G.: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **58**, 13—33 (1952).

[3] Schwartz, L.: Théorie des distributions, I. Paris 1950.

[4] Schwartz, L.: Théorie des distributions, II. Paris 1951.

[5] Tillmann, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Juli 1960)

Cigler, J.
Math. Zeitschr. 76, 22—30 (1961)

Hausdorffsche Dimensionen spezieller Punktmengen

Von

Johann Cigler

1. In den letzten Jahren erschienen mehrere Arbeiten, in denen die Hausdorffsche Dimension von Mengen reeller Zahlen untersucht wurde, deren g-adische Entwicklung gewissen Einschränkungen unterworfen ist (vgl. Volkmann [8] und die dort zitierte Literatur). Speziell interessierte man sich für Mengen von Zahlen, bei denen für die einzelnen Ziffern feste Frequenzen vorgeschrieben sind. Die Ergebnisse, die man dabei erzielte, legten die Vermutung nahe, daß eine enge Beziehung zwischen der Hausdorffschen Dimension einerseits und der Entropie der durch die Ziffernverteilung in der g-adischen Darstellung bestimmten "stationären ergodischen Quelle" andererseits besteht. Dieser Zusammenhang mit informationstheoretischen Fragestellungen wurde zuerst von Kinney [5] aufgedeckt. Er lieferte nicht nur eine neue Einsicht in den Begriff der Hausdorffschen Dimension, sondern führte gleichzeitig auch zu einer Vereinfachung der Beweise verschiedener Sätze. Die Kinneysche Methode wurde dann in einer kürzlich erschienen Arbeit von Billingsley [1] weiter verfolgt und bedeutend ausgebaut. Billingsley definiert einen Begriff der Hausdorffschen Dimension in beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen, die gewissen Einschränkungen genügen, und gelangt dann zu Resultaten, die eine große Anzahl von bekannten Sätzen im klassischen Fall verallgemeinern und erweitern.

In der vorliegenden Arbeit werden einige Ergebnisse von Volkmann [8] verallgemeinert und einige spezielle Probleme untersucht. Es zeigt sich, daß ein interessanter Zusammenhang mit ϑ-adischen Entwicklungen besteht. Für diese Fragestellungen erweist sich eine Kombination der Methoden von Kinney und Volkmann als vorteilhaft, da damit die Beweise besonders einfach und durchsichtig werden.

2. Die Hausdorffsche Dimension $\dim E$ einer Menge E ist folgendermaßen definiert: Sei $\eta>0$ eine reelle Zahl und $V_\eta=\{o_\nu\}$ eine η-Überdeckung von E mit offenen Mengen o_ν, d.h. es sei $E\subseteqq\bigcup_1^\infty o_\nu$ und das Lebesguesche Maß jeder dieser Mengen o_ν kleiner als η ($|o_\nu|<\eta$). Dann heißt der Grenzwert

$$\{M\}^\alpha=\lim_{\eta\to 0}\inf_{V_\eta}\sum_{\nu=1}^{\infty}|o_\nu|^\alpha \qquad (0<\alpha\leqq 1),$$

wo das Infimum über alle η-Überdeckungen von E zu erstrecken ist, das α-dimensionale Hausdorffsche Maß von E. Es gibt nun eine eindeutig bestimmte Zahl δ, so daß $\{M\}^\alpha=\infty$ für $\alpha<\delta$ und $\{M\}^\alpha=0$ für $\alpha>\delta$ gilt. Diese Zahl $\delta=\dim E$ heißt die Hausdorffsche Dimension von E.

Nun noch einige Konventionen über die zu verwendenden Bezeichnungsweisen: Unter g verstehen wir im folgenden stets eine ganze Zahl $g \geqq 2$. Wir betrachten alle reellen Zahlen $x \in [0, 1]$ in ihrer g-adischen Entwicklung:

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{x_\nu}{g^\nu} = 0, \; x_1 x_2 x_3 \ldots .$$

Unter einem Grundintervall n-ter Stufe I_n verstehen wir ein Intervall der Gestalt

$$\frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots + \frac{a_n}{g^n} \leqq x < \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{g^n} .$$

Mit $J_n(x)$ bezeichnen wir das Grundintervall n-ter Stufe, das die Zahl x enthält. Ferner sei $A_{a_1 a_2 \ldots a_k}(x, n)$ die Anzahl der x_ν in der Entwicklung von x mit $1 \leqq \nu \leqq n - k + 1$, für die $x_\nu = a_1$, $x_{\nu+1} = a_2$, …, $x_{\nu+k-1} = a_k$ gilt. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} A_{a_1 a_2 \ldots a_k}(x, n) = \zeta ,$$

so nennen wir ζ die Frequenz der Ziffernsequenz $[a_1 a_2 \ldots a_k]$ in der Entwicklung von x.

3. Wir benötigen folgendes kombinatorische

LEMMA[1]). *Es bezeichne* $A = A(a_0, a_1, \ldots, a_{g-1};\; b_{00}, b_{01}, \ldots, b_{g-1,g-1})$ *die Anzahl aller* n*-tupel* $x_1 x_2 \ldots x_n$ *von ganzen Zahlen* x_ν *mit* $0 \leqq x_\nu \leqq g - 1$, *in denen die Ziffer* i *genau* a_i*-mal auftritt* $(i = 0, 1, \ldots, g-1)$ *und außerdem die Ziffernkombination* ij *genau* b_{ij}*-mal auftritt* (ij *durchläuft alle möglichen Werte*). *Dann gilt für* A *die folgende Abschätzung nach oben:*

$$A(a_0, \ldots, a_{g-1};\; b_{00}, \ldots, b_{g-1\,g-1}) \leqq (g-1)! \prod_{i=0}^{g-1} \prod_{j=0}^{g-1} \frac{a_i!}{b_{ij}!} .$$

BEWEIS. Sei $x_1 x_2 \ldots x_n$ ein festes n-tupel. Wir wollen zwei Ziffern x_ν und x_μ äquivalent nennen, wenn $x_\nu = x_\mu$ und außerdem $x_{\nu+1} = x_{\mu+1}$ gilt, wenn also die beiden Ziffernpaare $x_\nu x_{\nu+1}$ und $x_\mu x_{\mu+1}$ übereinstimmen. Um das zu erreichen, hängen wir an x_ν die Zahl $x_{\nu+1}$ als Index an und schreiben das n-tupel in der Gestalt: $x_{1 x_2} x_{2 x_3} \ldots x_{n x_{n+1}}$. An die letzte Ziffer kann jede der Zahlen $0, 1, \ldots, g-1$ als Index angehängt werden. Wir können nun die Ziffern unseres n-tupels folgendermaßen ordnen: Das erste Element sei $x_{1 x_2}$. Dann kommen alle $x_{\nu x_{\nu+1}}$, für die $x_\nu = x_1$ ist, und zwar in derselben Reihenfolge, wie sie im gegebenen n-tupel auftreten. Als nächstes Element wählen wir das erste $x_{\nu x_{\nu+1}}$, das noch nicht verwendet wurde, und führen damit dasselbe Verfahren durch, usw. Wir bekommen auf diese Art ein n-tupel aus a_{i_1} Ziffern i_1, a_{i_2} Ziffern i_2, …, a_{i_g} Ziffern i_g. Wieviel derartige n-tupel gibt es? Ein festes System von a_i Ziffern i kann offenbar in $\prod_{j=0}^{g-1} \frac{a_i!}{b_{ij}!}$ verschiedene nichtäquivalente Anordnungen übergeführt werden. Macht man

[1]) Vgl. auch BILLINGSLEY [1].

das bei jedem i und kombiniert die Anordnungen unabhängig voneinander, so gibt das $\prod_{i=0}^{g-1}\prod_{j=0}^{g-1}\frac{a_i!}{b_{ij}!}$ verschiedene Möglichkeiten. Nun können noch die $i_1, i_2, \ldots, i_g$ untereinander permutiert werden. Dies ist auf $g!$ Arten möglich. Da man jedem n-tupel $x_1 x_2 \ldots x_n$ genau g geordnete n-tupel zuordnen kann (wegen der Mehrdeutigkeit der Zuordnung bei x_n) und verschiedene n-tupel auch verschiedene geordnete n-tupel liefern, folgt daraus unmittelbar die Behauptung unseres Lemmas.

4. Wir beweisen zunächst zwei Sätze[2]), die im wesentlichen von KINNEY [5] stammen.

SATZ 1. *Sei μ ein normiertes Maß auf $[0, 1]$ und E die Menge aller $x \in [0, 1]$, für die bei festem $\alpha \geqq 0$ die Ungleichung*

$$\mu\left(I_n(x)\right) > g^{-n(\alpha+\varepsilon)} \tag{1}$$

bei beliebigem $\varepsilon > 0$ für unendlich viele n erfüllt ist. Dann gilt $\dim E \leqq \alpha$.

BEWEIS. Sei $C_n = \{I_j\}$ eine g^{-n}-Überdeckung von E durch Grundintervalle I_j und $\varepsilon > 0$ fest. Für jedes $x \in E$ wählen wir dasjenige Grundintervall $I_m(x)$, für das

$$\mu\left(I_m(x)\right) > |I_m(x)|^{\alpha+\varepsilon} = g^{-m(\alpha+\varepsilon)}$$

für das kleinste $m \geqq n$ erfüllt ist. Ein solches m gibt es nach Voraussetzung. Klarerweise sind die I_j fremd. Wegen $E \subseteqq \bigcup_j I_j$ gilt somit

$$1 = \mu([0,1]) \geqq \mu\left(\bigcup_j I_j\right) = \sum_j \mu(I_j) > \sum_j |I_j|^{\alpha+\varepsilon}.$$

Läßt man n gegen Unendlich streben, so gilt also $\{E\}^{\alpha+\varepsilon} \leqq 1$, d.h. $\dim E \leqq \alpha + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ vollkommen beliebig war, ist also sogar $\dim E \leqq \alpha$, wzbw.

SATZ 2. *Es sei μ ein normiertes Maß auf $[0, 1]$ und E die Menge aller $x \in [0, 1]$, für die bei festem $\alpha \geqq 0$ und beliebigem $\varepsilon > 0$*

$$\mu\left(I_n(x)\right) < g^{-n(\alpha-\varepsilon)} \tag{2}$$

für alle hinreichend großen n gilt. Ist überdies $\mu(E) = 1$, dann gilt $\dim E \geqq \alpha$.

BEWEIS. Verläuft ganz analog wie bei KINNEY [5].

5. Die beiden folgenden Sätze bilden eine Verallgemeinerung von Resultaten von VOLKMANN [8].

SATZ 3. *Sei E die Menge aller Zahlen $x \in [0, 1]$, für die bei beliebigem $\varepsilon > 0$*

$$p_i p_{ij} - \varepsilon \leqq \frac{A_{ij}(x, n)}{n} \leqq p_i p_{ij} + \varepsilon \qquad (0 \leqq i, j \leqq g-1) \tag{3}$$

für unendlich viele n erfüllt ist, wobei $p_i \geqq 0$, $p_{ij} \geqq 0$, $\sum_j p_{ij} = p_i$, $\sum p_i = 1$ gilt. Dann ist

$$\dim E \leqq \alpha = -\frac{1}{\log g}\sum_{i=0}^{g-1}\sum_{j=0}^{g-1} p_i p_{ij} \log p_{ij}.$$

[2]) Satz 1 und 2 sind eine für unsere Zwecke vorteilhafte Umformulierung von Theorem I der Arbeit von KINNEY, wobei wir die Beschränkung auf Markowsche Ketten, die sich als überflüssig erweist, fallen lassen.

Beweis. Bezeichnet man mit $H_n(\varepsilon)$ die Menge aller x, die (3) erfüllen, so gilt $E \subseteqq \bigcup_{n=N}^{\infty} H_n(\varepsilon)$ für jedes N.

Die Anzahl $B_n(\varepsilon)$ der Grundintervalle n-ter Stufe, aus denen sich $H_n(\varepsilon)$ zusammensetzt, genügt der Ungleichung

$$B_n(\varepsilon) \leqq (2\varepsilon n + 1)^{g^2} \cdot A(p_0 n, \ldots, p_{g-1} n;\ p_0 p_{00} n, \ldots, p_{g-1} p_{g-1\,g-1} n),$$

wobei A die im Lemma eingeführte Größe bedeutet.

Nach unserem Lemma gilt also

$$B_n(\varepsilon) \leqq (2\varepsilon n + 1)^{g^2} (g-1)! \prod_{i=0}^{g-1} \prod_{j=0}^{g-1} \frac{(p_i n)!}{(p_i p_{ij} n)!}.$$

Wir wollen dabei annehmen, daß alle $p_i n$ und $p_i p_{ij} n$ ganz sind. (Wären sie nicht ganz, so müßte man sie durch ganze Zahlen derselben Größenordnung ersetzen; das ändert nichts an der nachfolgenden Abschätzung.) Aus der Stirlingschen Formel folgt dann

$$B_n(\varepsilon) \leqq e^{-n \sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log p_{ij} + \varepsilon_1 n} = g^{n(\alpha + \varepsilon_2)}$$

mit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Für $\beta > \alpha$ ist also

$$\{E\}^{\beta} \leqq \lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{g^{n(\alpha+\varepsilon_2)}}{g^{n\beta}} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=N}^{\infty} g^{n(\alpha-\beta+\varepsilon_2)} = 0$$

bei hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich, daß $\dim E \leqq \beta$ ist und da β eine beliebige Zahl $> \alpha$ war, auch die behauptete Relation $\dim E \leqq \alpha$.

Für den nächsten Satz benötigen wir noch einige Definitionen. Wir betrachten für jedes $x \in [0, 1]$ die Folge der Punkte

$$\mathfrak{y}_n(x) = \left(\frac{A_{00}(x, n)}{n-1}, \frac{A_{01}(x, n)}{n-1}, \ldots, \frac{A_{g-1,g-1}(x, n)}{n-1} \right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in einem g^2-dimensionalem euklidischen Raum.

Mit $V(x)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungspunkte der Folge $\{\mathfrak{y}_n(x)\}$. Man zeigt dann ganz analog wie bei Volkmann [8], daß die Menge $V(x)$ für jedes x ein Kontinuum, d.h. eine zusammenhängende abgeschlossene Menge, ist. Unter H verstehen wir die Menge aller Punkte $\mathfrak{x} = (x_{00}, x_{01}, \ldots, x_{g-1,g-1})$ des R^{g^2}, welche die Relationen $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ und $\sum_i \sum_j x_{ij} = 1$ erfüllen.

Ferner sei $d(\mathfrak{x}) = -\frac{1}{\log g} \sum_i \sum_j x_i x_{ij} \log x_{ij}$.

Dann gilt der

Satz 4. *Sei S eine beliebige Menge mit $S \subseteqq H$ und $C(S)$ die Menge aller x mit $V(x) \subseteqq S$. Dann ist*

$$\dim C(S) \leqq \max_{\mathfrak{x} \in S} d(\mathfrak{x}).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{z} \in S$ ein Punkt, in dem die Funktion $d(\mathfrak{x})$ ihr Maximum annimmt, und U die Menge aller Punkte $\mathfrak{x} \in H$ mit $d(\mathfrak{x}) \leqq d(\mathfrak{z}) + \varepsilon$. Dann

gilt $S \subseteq U$ und $C(S) \subseteq C(U)$. Die Anzahl $K(n)$ der Grundintervalle n-ter Stufe, in denen Elemente aus $C(U)$ liegen, ist

$$K(n) \leqq \sum_i \sum_j \prod_i \prod_j \frac{y_i!}{y_{ij}!} (g-1)!,$$

wobei die Summe über alle ganzen Zahlen y_i, y_{ij} zu erstrecken ist, für die $0 \leqq y_i \leqq n$, $0 \leqq y_{ij} \leqq n$ und $y_i = \sum_{j=0}^{g-1} y_{ij}$ gilt und für die außerdem die Punkte $\left(\frac{y_{00}}{n}, \frac{y_{01}}{n}, \ldots, \frac{y_{g-1,g-1}}{n}\right)$ in U liegen. Daraus folgt

$$K(n) \leqq n^{g^2} \max_{y_{ij}} (g-1)! \prod_i \prod_j \frac{y_i!}{y_{ij}!} \leqq g^{n(d(\mathfrak{g})+\varepsilon+\varepsilon_1)}.$$

Derselbe Schluß wie bei Satz 3 führt auch hier zum erwünschten Resultat.

6. Wir wollen nun die vorangegangenen Sätze auf einige spezielle Probleme anwenden.

SATZ 5. *Sei E die Menge aller Zahlen $x \in [0, 1]$, für die für alle ij gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A_{ij}(x, n)}{n} = p_i p_{ij}.$$

Dabei seien die p_i, p_{ij} derart, daß die Markowsche Kette mit den p_{ij} als Übergangswahrscheinlichkeiten ergodisch ist (vgl. A. I. KHINCHIN [4]). *Dann ist*

$$\dim E = \alpha = -\frac{\sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log p_{ij}}{\log g}.$$

BEWEIS. Die Abschätzung nach oben ergibt sich unmittelbar aus Satz 3. Für die Abschätzung nach unten verwenden wir Satz 2. Wir betrachten die Menge $E^* \subset E$ aller Zahlen $x \in [0, 1]$, $x = \sum_1^\infty \frac{x_\nu}{g^\nu}$, in denen die x_ν eine Markowsche Kette mit den angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten bilden. Sei μ das Maß, das durch diese Markowsche Kette auf $[0, 1]$ induziert wird. Da die Kette ergodisch ist, gilt $\mu(E^*) = 1$ und $\mu\left(I_n(x)\right) = g^{-n\alpha + o(n)}$ für jedes $x \in E^*$, also speziell $\mu\left(I_n(x)\right) < g^{-n(\alpha-\varepsilon)}$ (vgl. KINNEY [5]). Damit sind alle Voraussetzungen zu Satz 2 erfüllt, und es gilt daher $\dim E \geqq \alpha$, also insgesamt $\dim E = \alpha$.

BEMERKUNG 1. Satz 1 liefert uns nur $\dim E^* = \alpha$. Es gibt jedoch nicht abzählbar viele Zahlen $x \in [0, 1]$, für die zwar die Voraussetzungen zu Satz 5 erfüllt sind, bei denen die x_ν jedoch keine Markowsche Kette bilden[3]). Man kann also mit Hilfe von Satz 1 keine Aussage über $\dim E$ machen.

BEMERKUNG 2. Satz 5 ist eine Verallgemeinerung eines Resultates von EGGLESTON [3], der den Fall betrachtet, wo die Frequenzen für jede einzelne Ziffer vorgegeben sind.

---

[3]) Es existieren nicht einmal immer die Frequenzen für Ziffernsequenzen $a_1 a_2 \ldots a_k$ mit $k \geqq 3$.

7. Bekanntlich kann man jede reelle Zahl $x \in [0, 1]$ eindeutig (bis auf eine abzählbare Menge) nach einer beliebigen Basis $\vartheta > 1$ entwickeln: $x = \sum_1^\infty \frac{x_\nu}{\vartheta^\nu}$ mit ganzen Zahlen x_ν, $0 \leqq x_\nu \leqq [\vartheta]$. Jede Folge $\{x_\nu\}$, die in der ϑ-adischen Entwicklung einer Zahl x auftreten kann, wollen wir ϑ-zulässig nennen.

Sei nun $g \geqq 1 + [\vartheta]$ eine ganze Zahl. Wir betrachten dann die Abbildung φ, die der Zahl $y = \sum_1^\infty \frac{x_\nu}{\vartheta^\nu}$ die Zahl $x = \sum_1^\infty \frac{x_\nu}{g^\nu}$ zuordnet. Dabei geht das Intervall $[0, 1]$ in eine Menge $E \subseteqq [0, 1]$ über. Auf $[0, 1]$ existiert ein bezüglich der Transformation $Tx = \vartheta x - [\vartheta x]$ invariantes ergodisches Maß ν, das äquivalent zum Lebesgueschen Maß ist (vgl. z.B. J. Cigler [2]).

Durch die Festsetzung $\mu\left(I_n(x)\right) = \nu\left(\varphi^{-1}(I_n(x))\right)$, wenn $I_n(x)$ als Bildmenge auftritt, und $\mu\left(I_n(x)\right) = 0$ sonst wird auf $[0, 1]$ ein Maß μ definiert. Für alle $x \in E$ gilt $\mu\left(I_n(x)\right) \leqq c\vartheta^{-n}$ mit einer von x unabhängigen Konstanten c. Das folgt daraus, weil für ν die Relation $\nu(A) \leqq c|A|$ gilt, wobei A eine beliebige meßbare Menge bedeutet und $|A|$ das Lebesguesche Maß der Menge A, und weil die Länge eines ϑ-adischen Grundintervalles n-ter Stufe stets $\leqq 1/\vartheta^n$ ist. Für jedes $x \in E$ gilt also insbesondere $\mu\left(I_n(x)\right) \leqq g^{-n\left(\frac{\log \vartheta}{\log g} - \varepsilon\right)}$ für alle n.

Aus Satz 2 folgt somit der

Satz 6. *Sei E die Menge aller Zahlen $x \in [0, 1]$, $x = \sum_1^\infty \frac{x_\nu}{g^\nu}$, wo die $\{x_\nu\}$ alle ϑ-zulässigen Folgen durchlaufen für ein $\vartheta > 1$ mit $[\vartheta] \leqq g - 1$. Dann gilt*

$$\dim E \geqq \frac{\log \vartheta}{\log g}.$$

Für die Abschätzung nach oben brauchen wir die Relation (1) für unendlich viele n mit $\alpha = \frac{\log \vartheta}{\log g}$. Diese ist sicher dann erfüllt, wenn die ϑ-adische Entwicklung der Zahl 1 abbricht oder periodisch wird[4]). Daraus ergibt sich

Satz 7. *Ist die ϑ-adische Entwicklung der Zahl 1 periodisch, dann gilt für die Menge E aus Satz 6 die Relation*

$$\dim E = \frac{\log \vartheta}{\log g}.$$

8. Als weitere Anwendung unserer Sätze bestimmen wir die Hausdorffsche Dimension einiger Mengen, für die einzelne der Frequenzen der Ziffernkombinationen ij vorgeschrieben sind. Wir beschränken uns auf einen Spezialfall, aus dem aber klar ersichtlich ist, wie man bei speziellen Problemen vorzugehen hat.

Satz 8. *Die Menge E aller reellen Zahlen $x \in [0, 1]$, in deren g-adischer Entwicklung die Ziffernpaare $(g-1, j_\nu)$, $(\nu = 1, 2, \ldots, m;\ 0 \leqq j_\nu \leqq g-1;\ j_m = g-1)$ mit den Frequenzen $p_{g-1, j_\nu} = a_\nu$ auftreten, hat die Hausdorffsche Dimension*

[4]) In diesem Fall gibt es für t_n nur endlich viele Werte, wenn mit t_n/ϑ^n die Länge eines ϑ-adischen Grundintervalles n-ter Stufe bezeichnet wird.

$\dim E = \frac{\log \vartheta}{\log g}$, *wo* ϑ *die eindeutig bestimmte Lösung* $\vartheta \geqq g-1$ *der Gleichung*

$$\vartheta^{a_m-2} - \left(\frac{1-\sum a_\nu}{g-m}\right)^{(1-\sum a_\nu)} \cdot \prod a_\nu^{a_\nu} \cdot \left(1-\frac{g-1}{\vartheta}\right)^{1-a_m} = 0 \tag{4a}$$

im Falle $1 \leqq m \leqq g-2$, *bzw.*

$$\vartheta^{a_m-2} - \prod a_\nu^{a_\nu} \cdot \left(1-\frac{g-1}{\vartheta}\right)^{1-a_m} = 0 \tag{4b}$$

für $m=g$ *bedeutet.* $(0^0=1)$.

BEWEIS. Wir bestimmen das Maximum der Funktion $\frac{-\sum\sum p_i p_{ij} \log p_{ij}}{\log g}$ unter den Nebenbedingungen $p_{g-1,j_\nu} = a_\nu$. Dann ergibt sich aus Satz 3 und Satz 5, daß die Hausdorffsche Dimension gleich diesem Maximum ist, wenn die Markowsche Kette mit den maximalen p_{ij} als Übergangswahrscheinlichkeiten ergodisch ist, was bei unserem Beispiel zutrifft. Zur Bestimmung des Maximums verwenden wir die Lagrangesche Multiplikatorenmethode. Diese ist zulässig, da aus dem Resultat ersichtlich ist, daß das Maximum im Innern des betrachteten Gebietes angenommen wird.

Die betrachtete Funktion ist $f = \sum_i \sum_j p_i p_{ij} \log p_{ij} = \sum_i p_i f_{p_i}$. Als Nebenbedingungen ergeben sich die Gleichungen

$$(\alpha) \qquad \sum_i p_i - 1 = 0$$

$$(\beta_i) \qquad \sum_j p_{ij} - 1 = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, g-1)$$

$$(\gamma_j) \qquad \sum_i p_i p_{ij} - p_j = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, g-1)$$

und

$$p_{g-1,j_\nu} = a_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir müssen die Ableitungen der Funktion $f + \varkappa(\alpha) + \sum_i \mu_i(\beta_i) + \sum_j \lambda_j(\gamma_j)$ nach allen Variablen p_i, $p_{ij} \neq p_{g-1,j_\nu}$ bilden und gleich Null setzen. Dabei sind $\varkappa, \mu_i, \lambda_j$ die Lagrangeschen Multiplikatoren. Das ergibt die Gleichungen

$$(1)_i \qquad f_{p_i} + \varkappa + \sum_j \lambda_j (p_{ij} - \delta_{ij}) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, g-1)$$

$$(2)_{ij} \qquad p_i(1 + \log p_{ij}) + \mu_i + \lambda_j p_i = 0 \qquad (i,j) \neq (g-1, j_\nu).$$

Aus $(2)_{ij}$ und $(2)_{ik}$ ergibt sich $\log p_{ij} - \log p_{ik} = \lambda_k - \lambda_j$ für alle (i,j) und $(i,k) \neq (g-1, j_\nu)$. Für $i = 0, 1, \ldots, g-2$ gilt $1 = \sum_j p_{ij} = p_{i0} \sum_j e^{\lambda_0 - \lambda_j}$ wegen (β_i), und daraus folgt $p_{ij} = p_{lj}$ für $i, l \leqq g-2$ und alle j. Subtrahiert man $(1)_l$ von $(1)_i$, so erhält man

$$f_{p_i} - f_{p_l} + \varkappa - \varkappa + \sum_j \lambda_j (p_{ij} - p_{lj} + \delta_{lj} - \delta_{ij}) = 0$$

und daraus $\lambda_i = \lambda_l$ für alle $i, l \leqq g-2$, da $f_{p_i} = f_{p_l}$ ist. Also gilt $p_{ij} = p_{lk}$ für alle $i, j, l, k \leqq g-2$. Aus $(2)_{00}$ und $(2)_{0,g-1}$ ergibt sich $\lambda_{g-1} = \lambda_0 + \log \frac{p_{00}}{p_{0,g-1}}$.

Daraus folgt aus $(1)_0$ die Relation $\varkappa = -\log p_{00}$. Schließlich bekommt man aus $(1)_{g-1}$ die Gleichung

$$(4)\qquad \begin{cases} (1-\sum a_\nu)\log\dfrac{1-\sum a_\nu}{g-m} + \sum a_\nu \log a_\nu + \\ \quad + (a_m - 2)\log p_{00} - (a_m - 1)\log\left(1-(g-1)\,p_{00}\right) = 0, \end{cases}$$

wenn $m \leqq g-2$ ist. Für $m = g$ ($m = g-1$ ist unmöglich) fällt das Glied $(1-\sum a_\nu)\log\frac{1-\sum a_\nu}{g-m}$ weg.

Wir bekommen auf diese Art eine Gleichung für p_{00}. Nun folgt aber aus

$$\sum_i p_i \cdot (1)_i = \sum_i p_i f_{pi} + \varkappa \sum_i p_i + \sum_i \sum_j \lambda_j (p_i p_{ij} - p_i \delta_{ij}) = 0$$

wegen (α), (γ_j) die Beziehung

$$f + \varkappa + \sum_j \lambda_j \left(\sum_i p_i p_{ij} - p_j\right) = f + \varkappa = 0$$

und daher $f = -\varkappa = \log p_{00}$. Daraus ergibt sich nun unmittelbar die Behauptung des Satzes, wenn noch gezeigt werden kann, daß es genau eine Zahl p_{00} mit $0 < p_{00} < \frac{1}{g-1}$ gibt, die (4) erfüllt. Nun ist diese Gleichung von der Form $\varphi(x) = x^\alpha - \gamma\left(1-(g-1)\,x\right)^\beta = 0$ mit $\alpha \geqq 1$, $\beta \geqq 0$, $\gamma > 0$. ($x = p_{00}$, für p_{00} muß gelten $(g-1)\,p_{00} \leqq 1$). Da $\varphi(0) = -\gamma < 0$ und $\varphi\left(\frac{1}{g-1}\right) = \left(\frac{1}{g-1}\right)^\alpha > 0$ ist und die Ableitung $\varphi'(x) = \alpha x^{\alpha-1} + \gamma\beta\left(1-(g-1)\,x\right)^{\beta-1} > 0$ ist, folgt das sofort.

9. Fordert man speziell $p_{g-1,g-m} = \cdots = p_{g-1,g-1} = 0$, $m \leqq g-2$, so reduziert sich Gl. (4a) auf die Gleichung

$$\vartheta^{-2} - \frac{1}{g-m}\left(1 - \frac{g-1}{\vartheta}\right) \quad \text{oder} \quad \vartheta^2 - (g-1)\,\vartheta - (g-m) = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Matrix der p_{ij} mit der entsprechenden Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bei der ϑ-adischen Entwicklung übereinstimmt.

Es gilt sogar ein allgemeiner Satz, der einen Zusammenhang mit ϑ-adischen Entwicklungen herstellt. Bevor wir ihn formulieren, wollen wir noch einen neuen Begriff einführen. Wir nennen eine Ziffernsequenz $a_1\, a_2 \ldots a_k$ „kleiner" als $b_1\, b_2 \ldots b_k$, wenn $a_1\, a_2 \ldots a_k$ vor $b_1\, b_2 \ldots b_k$ ist bei lexikographischer Anordnung.

Eine Menge von Sequenzen (der Länge k) heiße $[a_1\, a_2 \ldots a_k]$-Kette, wenn sie $a_1\, a_2 \ldots a_k$ und alle größeren Sequenzen enthält.

Es gilt nun der

Satz 9. *Die Menge aller g-adischen Entwicklungen, die dadurch charakterisiert sind, daß in ihr die Sequenzen einer $[g-1, a_2, \ldots, a_k]$-Kette nicht vorkommen, besitzt die Hausdorffsche Dimension $\frac{\log\vartheta}{\log g}$, wo $\vartheta > g-1$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung*

$$(5)\qquad \vartheta^k - (g-1)\,\vartheta^{k-1} - \cdots - a_k = 0$$

ist.

BEWEIS. Sei $\vartheta^k=(g-1)\vartheta^{k-1}+\cdots+a_k$. Die Menge aller Folgen $\{x_\nu\}$, wo keine der Sequenzen einer $[g-1, a_2, \ldots, a_k]$-Kette auftritt, ist mit der Menge aller ϑ-zulässigen Folgen identisch[5]). Es gilt also nach Satz 7 (weil die Entwicklung $1=\frac{g-1}{\vartheta}+\frac{a_2}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{a_k}{\vartheta^k}$ abbricht), daß $\dim E=\frac{\log\vartheta}{\log g}$ ist, wo ϑ Lösung von $x^k-(g-1)x^{k-1}-\cdots-a_k=0$ ist mit $\vartheta\geqq g-1$.

Wir müssen noch zeigen, daß ϑ durch die Bedingung $\vartheta>g-1$ wirklich eindeutig bestimmt ist. Sei $f(x)=x^k-(g-1)x^{k-1}-\cdots-a_k$. Dann ist $f(g-1)<0$. Sei nun $x>g-1$ eine beliebige Nullstelle von $f(x)$. Dann ist wegen

$$x^k=(g-1)x^{k-1}+\cdots+a_k$$

der Wert

$$\begin{aligned}xf'(x)&=k\left((g-1)x^{k-1}+\cdots+a_k\right)-\left((g-1)(k-1)x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x\right)\\&=(g-1)(k-k+1)x^{k-1}+a_2(k-k+2)x^{k-2}+\cdots+a_{k-1}(k-1)x+ka_k>0.\end{aligned}$$

Es ist also an jeder Nullstelle $f'(x)>0$. Gäbe es mehr als eine Nullstelle, so müßte an mindestens einer $f'(x)<0$ sein, was unserem Resultat widerspricht.

BEMERKUNG. Ähnliche Fragestellungen wie in Satz 9 wurden von VOLKMANN [6], [7] untersucht, wobei jedoch andere Methoden verwendet wurden. Der Spezialfall, daß die Ziffernsequenz $[g-1, g-1, \ldots, g-1]$ ausgeschlossen wird, ist in den Ergebnissen von VOLKMANN [6] enthalten.

Literatur

[1] BILLINGSLEY, P.: Hausdorff dimension in probability theory. Illinois J. Math. **4**, 187–209 (1960).
[2] CIGLER, J.: Ziffernverteilung in ϑ-adischen Brüchen. Math. Z. **75**, 8–13 (1961).
[3] EGGLESTON, H. G.: The fractional dimension of a set defined by decimal properties. Quart. J. Math. **20**, 31–36 (1949).
[4] KHINCHIN, A. I.: Mathematical foundations of information theory. New York: Dover 1957.
[5] KINNEY, J. R.: Singular functions associated with Markov chains. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 603–608 (1958).
[6] VOLKMANN, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffernеigenschaften charakterisiert sind III. Math. Z. **59**, 259–270 (1953).
[7] VOLKMANN, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Punktmengen, die durch Zifferneigenschaften charakterisiert sind V. Math. Z. **65**, 399–413 (1956).
[8] VOLKMANN, B.: Über Hausdorffsche Dimensionen von Mengen, die durch Ziffernеigenschaften charakterisiert sind VI. Math. Z. **68**, 439–449 (1958).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 30. Juli 1960)

[5]) Eine Folge ist genau dann ϑ-zulässig, wenn

$$\frac{x_{\nu+1}}{\vartheta}+\frac{x_{\nu+2}}{\vartheta^2}+\cdots+\frac{x_{\nu+k}}{\vartheta^k}<1 \quad \text{für alle } \nu, k \text{ gilt.}$$

Raymond, F.
Math. Zeitschr. 76, 31—41 (1961)

Local Cohomology Groups with Closed Supports

By
Frank Raymond

1. Introduction

In the study of transformation groups certain theorems that hold for cohomology spheres have local analogues that hold for generalized manifolds (cohomology or homology manifolds). The Smith theorems are the classic examples. In [1] A. Borel pointed out that if one takes the direct limit of the cohomology groups with *closed supports*, $H^p(U-x; K)$, where U is an open neighborhood of a given point x in a locally compact Hausdorff space X then the resulting limit group $I_x^p(X; K)$ possess the algebraic properties necessary for one to pass formally and more or less automatically from certain global situations to the analogous local situation. However one needs to know how this new local group corresponds to the standard local cohomology or local homology groups. In certain cases a correspondence is easy to establish, for example when X is a generalized manifold. In Chapter 13 of [1] Borel used the correspondence in this particular case to localize his theorems on fixed points for elementary abelian groups. He also mentioned that using the correspondence which I shall establish in section 4 one should be able to deduce much of Chapter 5 from Chapter 4. In section 5 I shall show how one may deduce the standard local Smith theorems for generalized manifolds with comparatively simple formal manipulations from the corresponding Smith results for cohomology spheres.

The formula expressed as the exact sequence,

$$(4.3)\qquad \begin{cases} 0 \to \operatorname{Ext}\left(H^c_{p-1}(X, X-x; K), B\right) \to I_x^p(X; B) \\ \quad \to \operatorname{Hom}\left(H^c_{p+1}(X, X-x; K), B\right) \to 0, \end{cases}$$

establishes the desired correspondence for *clc* locally compact Hausdorff spaces where K denotes a principal ideal domain and B is a K-module. The correspondence between the somewhat analogous local homology "C"-groups and the standard local homology groups is much easier to derive (see [8] for definitions and correspondence). The difficulties in the case at hand arise partly from the lack of a relative sheaf cohomology theory.

In the first three sections the relative sheaf cohomology is developed so that in section 4 the different local groups may be compared. The remaining part of the paper is devoted to applications to transformation groups, generalized manifolds, and a new proof and generalization of Sitnikov's duality theorem.

I would like to thank Professor Borel for having called this problem to my attention and for several helpful conversations on the contents of this paper.

1. The cohomology sequence of a pair

Throughout the paper X will denote a topological space which satisfies at least the Hausdorff separation axiom and K will denote a principal ideal domain. If $\mathcal{S}$ is a sheaf on X it will usually mean a sheaf of K-modules. We shall follow the notation adopted in [5]. The restriction of a sheaf $\mathcal{S}$ on X to a subset A of X, the sections of S over A, and the canonical injective sheaf of cochains (see [2]) $\mathcal{C}^*(A; \mathcal{S}|A)$ are denoted by $\mathcal{S}|A$, $\mathcal{S}(A)$ and $\mathcal{C}(A; \mathcal{S})$, respectively. The sheaf on X which induces $\mathcal{S}|A$ on A and 0 on $X-A$ (A is locally closed) is denoted by $\mathcal{S}_A$. If Φ is a family of supports on X then $\Phi|A$ means those elements of Φ which are contained in A. When Φ is the family of all closed subsets of X then the sheaf cohomology of X with coefficients in the sheaf $\mathcal{S}$ will be denoted by $H^*(X; \mathcal{S})$ without any reference to the family Φ.

If A is a *closed* subset of X, $\mathcal{S}$ a sheaf on X, and Φ a family of supports (not necessarily paracompactifying) then there is an exact sequence of sheaves

$$0 \to \mathcal{S}_{X-A} \to \mathcal{S} \to \mathcal{S}_A \to 0 \tag{1.1}$$

which induces the exact cohomology sequence

$$\xrightarrow{d^*} H^p(X; \mathcal{S}_{X-A}) \to H^p(X; \mathcal{S}) \to H^p(X; \mathcal{S}_A) \to. \tag{1.2}$$

There is a natural homomorphism from $C^*_{\Phi|X-A}(X-A; \mathcal{S}|X-A)$ to $C^*_\Phi(X; \mathcal{S}_{X-A})$, which induces an isomorphism of the cohomology group $H^*_{\Phi|X-A}(X-A; \mathcal{S}|X-A)$ onto $H^*_\Phi(X; \mathcal{S}_{X-A})$ when Φ is paracompactifying, [5; II 4.10]. Then (1.2) becomes the exact sequence

$$\xrightarrow{d^*} H^*_{\Phi|X-A}(X-A; \mathcal{S}) \to H^p(X; \mathcal{S}) \to H^p_{\Phi|A}(A; \mathcal{S}) \to. \tag{1.3}$$

The cohomology module $H^*_\Phi(X; \mathcal{S}_{X-A})$ can be written in the classical way $H^*_\Phi(X, A; \mathcal{S})$. As we have seen, it is an invariant of $X-A$ and $\Phi|X-A$ when Φ is paracompactifying.

If U is an open subset of X the family of closed subsets of U is not in general a subfamily of a family of supports on X. The sheaf cohomology of U, $H^*(U; \mathcal{S})$, cannot be obtained in a natural way by concentrating the sheaf on U and taking cochains with supports in X as in the case of a closed subset. Also there doesn't seem to have been developed any corresponding relative theory as in the Čech and Alexander-Spanier cohomology theories. However, if one takes advantage of the fact that the sheaf of cochains $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})$ is an injective sheaf, a suitable relative sheaf cohomology theory may be defined.

Since $\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})$ is flabby, $\Gamma'\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S}) \to \Gamma(\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})|U) \to 0$ is exact for any open subset U of X. This implies by [5; II Lemma 4.9.1] that

$$\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})|A = \mathcal{C}^*(A; \mathcal{S}|A) = \mathcal{C}^*(A; \mathcal{S}), \tag{1.4}$$

for any locally closed subset A of X, on which $\mathcal{S}$ is locally concentrated.

Let $\Gamma_{X,U}\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})$ be the kernel of the epimorphism $\Gamma'\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S}) \xrightarrow{i} \Gamma(\mathcal{C}^*(U; \mathcal{S})) \to 0$. Thus $\Gamma_{X,U}\mathcal{C}^*(X; \mathcal{S})$ *are the cochains of* X *which vanish*

on U; i.e., *those cochains of X which have support on $X - U$. From the exact sequence of cochains*

$$(1.5)\qquad 0 \to \Gamma_{X,U}\left(\mathscr{C}^*(X;\mathscr{S})\right) \xrightarrow{j} \Gamma\left(\mathscr{C}^*(X;\mathscr{S})\right) \xrightarrow{i} \Gamma\left(\mathscr{C}^*(U;\mathscr{S})\right) \to 0,$$

one obtains the derived exact cohomology sequence,

$$(1.6)\qquad \to H^p(X, U;\mathscr{S}) \xrightarrow{i^*} H^p(X;\mathscr{S}) \xrightarrow{i^*} H^p(U;\mathscr{S}) \xrightarrow{*} H^{p+1}(X, U;\mathscr{S}) \to.$$

If V is an open subset of U then there exists a natural homomorphism of the exact sequence (1.6) for U into that for V. Now, if Y is an arbitrary subset of X the open sets U containing Y form an inverse system of sets directed by inclusion. Hence, we may form the direct limit of the exact sequences (1.6). If X is *metrizable* $\operatorname{Dir\,lim}_{U \supset Y} H^p(U;\mathscr{S}) = H^p(Y;\mathscr{S})$ by [5; II 4.11.1]. Define $H^p(X, Y;\mathscr{S}) = \operatorname{Dir\,lim}_{U \supset Y} H^p(X, U;\mathscr{S})$. Thus when X is metrizable the direct limit of the exact sequence (1.6) becomes the exact sequence

$$(1.7)\qquad \to H^p(X, Y;\mathscr{S}) \xrightarrow{j^*} H^p(X;\mathscr{S}) \xrightarrow{i^*} H^p(Y;\mathscr{S}) \xrightarrow{d^*} H^{p+1}(X, Y;\mathscr{S}) \to.$$

If $\mathscr{S} = K$, $H^p(X, Y;\mathscr{S})$ is isomorphic to the p-th relative Čech and p-th relative Alexander-Spanier cohomology group.

2. Characterization $H^*(H, U;\mathscr{S})$

In this section we define a module equivalent to $H^*(X, U;\mathscr{S})$ when X is locally compact and *hlc*. The method depends heavily on the work of Borel and Moore [2].

Let X be locally compact and $R(K)$ be an injective resolution of K induced by the imbedding of K into its field of quotients. Let the subscript c denote the family of *compact subsets* of a given topological space. Following Borel and Moore, define $\mathscr{C}_H(X;K)$ as the sheaf determined by the presheaf $U \to \operatorname{Hom}\left(\Gamma_c(\mathscr{C}^*(X;K)|U), R(K)\right)$. *The standard sheaf for homology of X with coefficients in the sheaf $\mathscr{S}$, $\mathscr{C}_H(X;\mathscr{S})$ is defined as $\mathscr{S} \otimes \mathscr{C}_H(X;K)$.* If Φ is any family of supports then $H_p^{\Phi}(X;\mathscr{S}) = H_p\left(\Gamma_{\Phi}(\mathscr{C}_H(X;\mathscr{S}))\right)$.

In [2] it is shown that $\mathscr{C}_H(X;K)$ is a flabby sheaf, $\mathscr{C}_H(X;K)\,(U)$ is a torsion free graded differential module for every U open in X. Moreover, the natural homomorphism $\operatorname{Hom}\left(\Gamma_c(\mathscr{C}^*(X;K)|U), R(K)\right) \to \mathscr{C}_H(X;K)\,(U)$ is an isomorphism onto, and the homology theory is functorial with respect to proper maps. Hence, from the exact sequence of chains

$$(2.1)\quad 0 \to \Gamma_c\left(\mathscr{C}_H(X;K)|U\right) \xrightarrow{i} \Gamma_c\left(\mathscr{C}_H(X;K)\right) \xrightarrow{j} \Gamma_c\mathscr{C}_H(X;K)/\Gamma_c\left(\mathscr{C}_H(X;K)|U\right) \to 0,$$

one obtains the exact derived homology sequence

$$(2.2)\qquad \xrightarrow{d_*} H_p^c(U;K) \xrightarrow{i_*} H_p^c(X;K) \xrightarrow{j_*} H_p^c(X, U;K) \xrightarrow{d_*} H_{p-1}^c(U;K) \to$$

The following lemma is taken from [2; 6.4, 6.5].

Lemma 1 (Borel-Moore). *Let B be a K-module and N an injective resolution of B finite degree. Let A be the sheaf defined by $U \to \operatorname{Hom}\left(\Gamma_c(\mathscr{C}_H(X;K)|U), N\right)$.*

Then

(i) $\mathscr{A}(U) = \mathrm{Hom}\left(\Gamma_c(\mathscr{C}_H(X; K)\, U), N\right)$,

(ii) *The sheaf* $\mathscr{A}$ *is bounded below;* $\mathscr{A}^p$ *is flabby for each* p,

(iii) *If* X *is* hlc^r, *then* $\mathscr{H}^p(\mathscr{A}) = 0$, $1 \leqq p \leqq r$, *and* $\mathscr{H}^0(\mathscr{A}) = B$,

(iv) *For each* U *open in* X, *the sequence*

$$(2.3)\quad 0 \to \mathrm{Ext}\left(H^c_{p-1}(U; K), B\right) \to H^p\left(\mathscr{A}(U)\right) \to \mathrm{Hom}\left(H^c_p(U; K), B\right) \to 0,$$

is exact and natural with respect to inclusion maps. In particular, if X *is* hlc^r *the module* $H^p(\mathscr{A}(U)) = H^p(U; B)$, $p \leqq r$ *(see the following discussion).*

Consider the commutative diagram

$$(2.4)\quad \begin{cases} 0 \to (\text{kernel } i_1) \to & \Gamma(\mathscr{A}) & \xrightarrow{i_1} & \Gamma(\mathscr{A}|U) & \to 0 \\ & \downarrow j & & \downarrow j & \\ 0 \to (\text{kernel } i_2) \to & \Gamma\left(\mathscr{C}(X; \mathscr{A})\right) & \xrightarrow{i_2} & \Gamma\left(\mathscr{C}(X; \mathscr{A})\, U\right) & \to 0. \end{cases}$$

The horizontal rows are exact because of (1.4) and the fact that the sheaf $\mathscr{A}$ and the sheaves of cochains are flabby. The top line of (2.4) is nothing but the dual of (2.1); thus kernel $i_1 = \mathrm{Hom}\left(\Gamma_c(\mathscr{C}_H(X; K))/\Gamma_c(\mathscr{C}_H(X; K)|U), N\right)$, i.e. the dual of the chains with compact support of X mod U. The terms of the second row may be regarded as double complexes since $\mathscr{A}$ is a graded differential sheaf. Then (2), (5) and (6) of [5; pp. 177—178] and the facts that $H^q(X; \mathscr{A}) = H^q(U; \mathscr{A}) = 0$ for $q > 0$ imply the natural homomorphisms j of the second and third columns induce isomorphisms onto in the derived cohomology diagram. The five lemma implies that H (kernel i_1) is mapped isomorphically onto the total cohomology of the double complex (kernel i_2). There is a spectral sequence $'E_r^{p,q}$ associated to the double complex $\Gamma\left(\mathscr{C}(X; \mathscr{A})\right)$, (see p. 177 of [5]), with the property $'E_1^{p,q} = C^p\left(X; H^q(\mathscr{A})\right)$ and $'E_2^{p,q} = H^p\left(X; H^q(\mathscr{A})\right)$. It can be seen that the spectral sequence associated to the subcomplex (kernel i_2) has $'E_1^{p,q}$ term equal to those p-cochains of X with coefficients in $H^q(\mathscr{A})$ whose support does not meet U. Thus the $'E_2^{p,q}$ term $= H^p\left(X, U; \mathscr{H}^q(\mathscr{A})\right)$. But by Lemma 1, $H^q(\mathscr{A}) = 0$ for $q \neq 0$, and B for $q = 0$. Thus the spectral sequence $'E_r^{p,q}$ is trivial and H^p (kernel i_2) $= H^p(X, U; B)$. Consequently we have

THEOREM 1. *If* X *is locally compact and* hlc^r, U *an open subset and* B *is a* K*-module, then the sequence*

$$(2.5)\quad 0 \to \mathrm{Ext}\left(H^c_{p-1}(X, U; K), B\right) \to H^p(X, U; B) \to \mathrm{Hom}\left(H^c_p(X, U; K), B\right) \to 0,$$

is exact and natural with respect to inclusion maps, for $0 \leqq p \leqq r$.

3. Excision

In this section it is shown that one may excise a closed subset from the relative sheaf cohomology.

We have seen that $H^p_\Phi(X, A; \mathscr{S})$ may be identified with $H^p_{\Phi|X-A}(X - A; \mathscr{S})$ when A is a closed subset of the Hausdorff space X, $\mathscr{S}$ a sheaf on X and Φ

is a paracompactifying family on X. Thus, if U is an open subset of X such that $U \subset A$, the $H^p_\Phi(X-U, A-U; \mathscr{S}) = H^p_\Phi(X, A; \mathscr{S})$. It will now be shown that an excision of a closed set F, $F \subset U$, for $H^p(X, U; \mathscr{S})$ is possible.

Consider the commutative diagram

$$\begin{cases} 0 \to & \Gamma_{X,U}(\mathscr{C}^*(X;\mathscr{S})) & \xrightarrow{j_1} & \Gamma(\mathscr{C}^*(X;\mathscr{S})) & \xrightarrow{i_1} & \Gamma(\mathscr{C}^*(U;\mathscr{S})) & \to 0 \\ & \downarrow i & & \downarrow i' & & \downarrow i'' & \\ 0 \to & \Gamma_{X-F,U-F}(\mathscr{C}^*(X-F;\mathscr{S})) & \xrightarrow{j_2} & \Gamma(\mathscr{C}^*(X-F;\mathscr{S})) & \xrightarrow{i_2} & \Gamma(\mathscr{C}^*(U-F;\mathscr{S})) & \to 0. \end{cases}$$

The epimorphisms i_1, i_2, i', and i'' are all induced by inclusions. The homomorphism i is well defined by $j_2^{-1} i' j_1$. It sends a cochain of X whose support is on $X-U$ by restriction into a class of cochains on $X-F$ with support on $X-U$. Clearly i has trivial kernel. It easily follows that i is also an epimorphism since i' is an epimorphism and $X-U$ is a closed subset of $X-F$. By passing to the derived of (3.1) one obtains

Lemma 2 *(Excision for relative cohomology). If F and U are closed and open subsets of X, respectively, such that $F \subset U$, then the inclusion induces an isomorphism of $H^*(X, U; \mathscr{S})$ onto $H^*(X-F, U-F; \mathscr{S})$, for any sheaf $\mathscr{S}$ on X.*

From (1.7) we obtain the

Corollary. *If Y is an arbitrary subset of a metrizable space X and F is a closed subset of X such that $F \subset Y$, then the inclusion induces an isomorphism of $H^*(X, Y; \mathscr{S})$ onto $H^*(X-F, Y-F; \mathscr{S})$.*

4. Local cohomology groups

P. Conner [4] has defined a type of local group which has been used by Borel [1] for localizing global arguments in transformation group theory and by myself [9] for discussing compactifications of manifolds. The following is a modification of Conner's cohomology of the ideal boundary.

If F is a subset of the space X, the family of open sets containing F form an inverse system of sets directed by inclusion. Let $i_{U,V}$ denote the inclusion map $V \subset U$.

4.1. Definition. $I^p_F(X; \mathscr{S}) = \operatorname{Dir\,lim}\{H^p(U-F, \mathscr{S}), i^*_{U-F, V-F}\}$, where $F \subset V \subset U$.

Lemma 3. *If X is paracompact and F is a closed subset or if X metrizable and F is an arbitrary subset then the sequence*

$$\to H^p(X, X-F; \mathscr{S}) \xrightarrow{j^*} H^p(F; \mathscr{S}) \xrightarrow{i^*} I^p_F(X; \mathscr{S}) \xrightarrow{d^*}, \tag{4.2}$$

is exact.

Proof. Consider the exact sequence

$$\xrightarrow{d^*} H^p(U, U-F; \mathscr{S}) \xrightarrow{j^*} H^p(U; \mathscr{S}) \xrightarrow{i^*} H^p(U-F; \mathscr{S}) \xrightarrow{d^*}.$$

Take the direct limit over all open sets U containing F and apply excision, (Lemma 2), to the first term, [5; II, Theorem 4.11.1] to the second term and the definition to the last term. This gives (4.2).

Note that when X is compact, F closed, and $\mathscr{S}$ is a K-module (4.2) is the same as [9; (2.6)], in fact, $I_F^p(X; B)$ is the same as what CONNER has called $I^p(X-F; B)$.

If F is a point (4.2) is exact without assuming X paracompact.

Let us denote the *reduced* cohomology groups by putting a tilda over the symbol for cohomology. *Then for* $x \in X$, *it is clear that* $\tilde{I}_x^p(X; B) = H^{p+1}(X, X-x; B)$ *if* $H^0(X, X-x; B) = 0$, and $I_x^p(X; B) = H^{p+1}(X, X-x; B)$ if $H^0(X, X-x; B) \neq 0$.

Combining (2.5) of Theorem 1 (where $U = X - x$) with the identification just mentioned above enables us to obtain our principal result on the local cohomology groups with closed supports viz,

THEOREM 2. *If* X *is locally compact and clc, then the sequence*

$$(4.3)\quad 0 \to \operatorname{Ext}\left(H_p^c(X, X-x; K), B\right) \to I_x^p(X; B) \to \operatorname{Hom}\left(H_{p+1}^c(X, X-x; B\right) \to 0$$

is exact, (with the obvious modifications in dimension 0).

We remark that if $K = B = a$ field then $\operatorname{Ext}\left(H_p^c(X, X-x; K), K\right) = 0$.

We are now interested in obtaining a converse to [1; Chapter 13, Lemma 3.2]. (This lemma also occurs independently in the proof of [9; Theorem 4].) As pointed out in [1], such a converse will be useful in transformation groups.

THEOREM 3. *Let* K *be a field,* X *be locally compact and clc over* K. *Then* X *is an* $n-gm$[1]) *over* K *(not necessarily orientable) if and only if* $I_x^p(X; K) \approx H^p(S^{n-1}; K)$ *for each* $x \in X$. *(*S^{n-1} *denotes the* $(n-1)$*-sphere).*

Proof. Since X is clc, the r-th dimensional local co-Betti number $p^r(x; X) = \dim H_r^c(X, X-x; K)$. By Theorem 2, $\tilde{I}_x^p(X; K) \approx H_{p+1}^c(X, X-x; K)$. Furthermore $H_0^c(X, X-x; K) = 0$. Thus the theorem follows.

It is also possible when K is the integers or a field to express in terms of the local group, $I_x^p(X; K)$, a condition implying that the $n-gm$ X be locally orientable. The proof uses the ideas exploited in [8] together with [7; Proposition] and the universal coefficient theorems. We shall state the result without proof as we shall not need it in what follows.

Let X *be an* $n-gm$ *over* K, *the integers or a field. Then* X *is locally orientable if and only if, for each* x, *there exists open sets* U, V *and* W $(x \in W \subset \overline{W} \subset V \subset U)$, *and a module* L *with* $K \cong L \subset H^{n-1}(V - \overline{W}; K)$, *such that* $i^*: H^r(U; K) \to H^r(V; K)$ *is trivial, for* $r \geqq n-1$, *and the image*

$$\left(i^*_{U-y, V-\overline{W}}(H^{n-1}(U-y; K)) \subset H^{n-1}(V-\overline{W}; K)\right) = L,$$

for all $y \in W$.

5. Application to transformation groups

In this section we illustrate how Theorem 3 enables one to pass from a global situation to a local situation in transformation groups. We shall obtain the fixed point theorems for periodic mappings of generalized manifolds from the corresponding global theorem for cohomology spheres.

[1]) A generalized n-manifold or cohomology n-manifold (denoted by $n-gm$) is defined in [12, 1, or 10].

To use Theorem 3 one needs the fact that the direct limit of the spectral sequences of an inverse sequence of continuous maps is the spectral sequence of the limit map, (see [*1*; Chapter 5]). This is true more generally for well ordered inverse systems but as we shall need open subsets to be paracompact we shall restrict ourselves to *locally compact metrizable spaces* for the duration of this section. We shall assume that the coefficient domain K and the transformation group G is isomorphic to the integers modulo a prime p, Z_p.

LEMMA 4 (SMITH). *Let Z_p act on the space X. If $\dim_{Z_p} X<\infty$ and is clc over Z_p, then the fixed point set F, $(F=F(Z_p, X))$ is clc over Z_p.*

A proof of this lemma may be found in [*1*; Chapter 4].

THEOREM 4 (SMITH). *Let X be a locally orientable $n-gm$ over Z_p. Suppose hat $Z_p=G$ acts on X. Then each component of $F(Z_p, X)$ is a locally orientable $-gm$.*

Proof. If a compact group G acts on a locally compact Hausdorf space X we may form the commutative diagram, (see [*1*] for further details).

$$\begin{cases} X \leftarrow X\times E \rightarrow E \\ \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\ X_G \xleftarrow{\pi_1} X\times_G E \xrightarrow{\pi_2} B_G. \end{cases} \tag{5.1}$$

The space E is acyclic up to a very large dimension N and is the total space for the N-universal classifying space B_G of the group G. The map π_2 is a fibering with fiber X and structural group G. If $G=Z_p$, as in the case at hand, the map π_1 over $X/G-F$ is a Vietoris map implying that $H^k(X_G; Z_p)$ i^* $H^k\big((F\cap X)_G; Z_p\big)$ for $k>n$, $(X_G=X\times_G E,\ F_G=F\times_G E=F\times B_G)$. If Y is an invariant subset of X, the inclusion $i_{X,Y}: Y\subset X$ induces a homomorphism of the spectral sequence ${}_XE_r^{s,t}$ of the fibering $(X_G \xrightarrow{\pi_2} B_G)$ into the spectral sequence ${}_YE_r^{s,t}$ of the fibering $(Y_G \xrightarrow{\pi_2} B_G)$. Let $x\in F(Z_p, X)$. There exist a sequence $\{U_i\}$ of invariant neighborhoods which form a complete neighborhood system of x. For each U_i-x we have a diagram as above. By passing to a direct limit one obtains a spectral sequence $E_r^{s,t}=\operatorname{Dir\,lim}\{{}_iE_r^{s,t}\}$ of the inverse sequence of fiberings $\{(U_i-x)\times_G E \xrightarrow{\pi_2} B_G;\ i^*_{U_i-x,\,U_{i+1}-x}\}$. The E_2 term of this spectral sequence is

$$\begin{aligned} E_2^{s,t} &= \operatorname{Dir\,lim}\{H^s\big(B_G; H^t(U_i-x; Z_p)\big)\} \\ &= H^s(B_G;\ I_x^t(X; Z_p) \approx H^s\big(B_G; H^t(S^{n-1}; Z_p)\big). \end{aligned}$$

Thus the local problem at x now coincides with the algebraic part of the argument used in [*1*; Chapter 4] to show that whenever Z_p acts on a cohomology sphere the fixed point set is a cohomology sphere. We may assume F is not o-dimensional at x for then x would be an isolated point. We have

$$\begin{aligned} \operatorname{Dir\,lim} H^k\big((U_i-x)_G; Z_p\big) &= \operatorname{Dir\,lim} \sum_{r+s=k} H^r\big((U_i-x)\cap F; Z_p\big)\otimes H^s(B_G; Z_p) \\ &= \operatorname{Dir\,lim} H^k\big(((U_i-x)\cap F)\times B_G; Z_p\big) \end{aligned}$$

for $k>n$. Since $E_2^{s,t}=E_\infty^{s,t}$ when F is not empty it follows $s-1<n-1$ from the equation above that $I_x^r(F;Z_p)\approx H^r(S^{s-1};Z_p)$ for some integer $s-1<n-1$. By Lemma 4, F is clc and therefore by (4.3) each point x has local homology groups

$$H_r^c(F,F-x;Z_p)=\begin{cases}0, & r\neq s\\ Z_p, & r=s.\end{cases}$$

However the integer s may depend upon the point x. We denote this dependence by $s(x)$. Clearly, if we show that $s(x)=s(y)$ for each x and y in a given component of F then Theorem 3 implies that this component is an $s-gm$ over Z_p. Local orientability will follow from the argument to be given.

Let us denote a component of F by the same letter, F. Choose U and V connected orientable invariant neighborhoods of $x\in F$ with the properties $\big(j^*(H_c^r(V;Z_p))\subset H_c^r(U;Z_p)\big)=0$, $r\neq n$, $\big(j^*(H_c^r(V\cap F;Z_p))\subset H_c^r(U\cap F;Z_p)\big)=0$, $r\neq s(x)$ and $\big(j^*(H_c^{s(x)}(W\cap F;Z_p))\subset H_c^{s(x)}(U\cap F;Z_p)\big)=\big(j^*(H_c^{s(x)}(V\cap F;Z_p))\subset H_c^{s(x)}(U\cap F;Z_p)\approx Z_p$, for any open invariant W, $x\in W\subset V$. Let $y\in V\cap F$. Choose V_y and U_y similar to the manner in which we choose V and U and so that $y\in V_y\subset U_y\subset V\subset U$. For each of the sets V_y, U_y, V and U consider the diagram (5.1) and the corresponding spectral sequences for the fiberings π_2 but now with *compact supports*. Because of the conditions on the choice of the sets V_y, U_y, V and U it is immediate that ${}_{V_y}E_\infty^{s,t}\to{}_{U_y}E_\infty^{s,t}$ and ${}_VE_\infty^{s,t}\to{}_UE_\infty^{s,t}$ are trivial when $t\neq n$. For $t=n$, ${}_{V_y}E_2^{s,n}={}_{V_y}E_\infty^{s,n}={}_{U_y}E_2^{s,n}={}_{U_y}E_\infty^{s,n}={}_VE_2^{s,n}={}_VE_\infty^{s,n}={}_UE_2^{s,n}={}_UE_\infty^{s,n}\approx Z_p$. The remarks about the diagram (5.1) imply the existence of the commutative diagram for all $k>n$,

$$(5.2)\qquad \begin{cases} 0\to\sum\limits_{i+j=k}H_c^i(V_y\cap F;Z_p)\otimes H_c^j(B_G;Z_p)\to H_c^k\big((V_y)_G;Z_p\big)\\ \qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\\ 0\to\sum\limits_{i+j=k}H_c^i(U_y\cap F;Z_p)\otimes H_c^i(B_G;Z_p)\to H_c^k\big((U_y)_G;Z_p\big)\\ \qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\\ 0\to\sum\limits_{i+j=k}H_c^i(V\cap F;Z_p)\otimes H_c^j(B_G;Z_p)\to H_c^k(V_G;Z_p)\\ \qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\\ 0\to\sum\limits_{i+j=k}H_c^i(U\cap F;Z_p)\otimes H_c^i(B_G;Z_p)\to H_c^k(U_G;Z_p).\end{cases}$$

Since $H^j(B_G;Z_p)\cong Z_p$, for all j it follows that $s(x)=s(y)$ for all $y\in V\cap F$, and that the neighborhood $V\cap F$ of X is an orientable neighborhood. This completes the proof.

Clearly, if F lies in an orientable part of X then F is orientable. Moreover, when $F\neq\varphi$, the local parity theorems follow immediately from the global parity theorems in the present framework.

6. Poincaré duality and Sitnikov duality

Let Φ be a paracompactifying family on a homology n-manifold X over K. Let $\mathscr{T}$ be the orientation sheaf $\mathscr{H}\big(\mathscr{C}_H(X;K)\big)$. Let $\mathscr{S}$ be a sheaf on X and let $\mathscr{A}^p=\mathscr{C}_H(X;\mathscr{S})_{n\ p}$. Then $\mathscr{H}^0(\mathscr{A})=\mathscr{S}\otimes\mathscr{T}$, $H^p(\mathscr{A})=0$, $p>0$. Let F be

a closed subset of X then the diagram (Poincaré duality),

$$(6.1)\quad \begin{cases} \xrightarrow{i_*} & H_p^{\Phi}(X;\mathscr{S}) & \xrightarrow{j_*} H_p^{\Phi}(X, X-F, \mathscr{S}) \xrightarrow{d_*} & H_{p-1}^{\Phi|X-F}(X-F;\mathscr{S}) & \xrightarrow{i_*} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \xrightarrow{j^*} H_{\Phi}^{n-p}(X;\mathscr{S}\otimes\mathscr{T}) & \xrightarrow{i^*} H_{\Phi|F}^{n-p}(F;\mathscr{S}\otimes\mathscr{T}) & \xrightarrow{d^*} H_{\Phi|X-F}^{n-p+1}(X-F;\mathscr{S}\otimes\mathscr{T}) \rightarrow & \end{cases}$$

is commutative. The horizontal rows are exact and the vertical homomorphisms are all isomorphisms onto. The algebraic form of the Poincaré duality is proved in [3; Chapter 19]. This particular form for singular homology and for Čech homology with coefficients in a field is discussed in detail for example in the author's disertation. The recent work of BOREL-MOORE [2] now makes it possible to use the Borel-Moore homology theory.

We would now like to replace the role of the closed subset F in (6.1) by an arbitrary subset Y of X. Recall that if $S=K$ the sheaf $\mathscr{A}$ is a flabby resolution of the sheaf $\mathscr{T}$. Let U be an open subset of X. The same conditions that held for the sheaf (which was also called $\mathscr{A}$) in the proof of Theorem 1 now hold for the sheaf $\mathscr{A}$. Carrying through the formal algebraic analogue[1]) of (2.4) and (2.5) one obtains

THEOREM 5. *If X is a homology n-manifold then the diagram*

$$(6.2)\quad \begin{cases} \xrightarrow{i_*} & H_p(X;K) & \xrightarrow{j^*} & H_p(U;K) & \xrightarrow{d_*} & H_{p-1}(X-U;K) & \xrightarrow{i_*} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \xrightarrow{j^*} H^{n-p}(X;\mathscr{T}) & \xrightarrow{i^*} & H^{n-p}(U;\mathscr{T}) & \xrightarrow{d^*} & H^{n-p+1}(X,U;\mathscr{T}) & \xrightarrow{j^*} & \end{cases}$$

is commutative. The horizontal rows are exact and the vertical homomorphisms are isomorphisms onto.

One should observe that the role of the closed and open subsets of X are interchanged in this new form of the Poincaré duality sequence.

Now let Y be an arbitrary subset of the homology n-manifold X and *assume* that X is *metrizable*. Taking the direct limit of (6.2) over all open U containing Y and using (1.7) one obtains the

COROLLARY. *Let Y be an arbitrary subset of the metrizable homology n-manifold X. Then the diagram*

$$(6.3)\quad \begin{cases} \xrightarrow{i_*} & H_p(X;K) & \xrightarrow{j_*} \operatorname{Dir\,lim}_{U\supset Y} H_p(U;K) & \xrightarrow{d_*} & H_{p-1}^{\Phi|X-Y}(X-Y;K) & \xrightarrow{i_*} \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \xrightarrow{j^*} H^{n-p}(X;\mathscr{T}) & \xrightarrow{i^*} & H^{n-p}(Y;\mathscr{T}) & \xrightarrow{d^*} & H^{n-p+1}(X,Y;\mathscr{T}) & \xrightarrow{j^*} & \end{cases}$$

is commutative, the rows are exact and the vertical homomorphisms are isomorphisms onto.

$$\left(H_{p-1}^{\Phi|X-Y}(X-Y;K) = \operatorname{Dir\,lim}_{U\supset Y} H_{p-1}(X-U;K)\right).$$

If H is an exact homology theory on the category of compact pairs then one may construct an exact homology theory on the category of arbitrary

[1]) The argument here is actually simpler since $\mathscr{A}$ is a resolution of $\mathscr{T}$.

Hausdorff pairs (X, A) by defining $H_p^c(X, A; K)$ to be the Dir $\lim_\lambda H_p(X_\lambda, A_\lambda; K)$ where (X_λ, A_λ) is the family of compact pairs in (X, A). (See [6; p. 255 Ex C—1].) In particular, if the homology n-manifold X in the corollary above is compact, the top row of (6.3) becomes

$$(6.4) \qquad \xrightarrow{i_*} H_p(X; K) \xrightarrow{j^*} H_p^c(X, X - Y, K) \xrightarrow{d_*} H_{p-1}^c(X - Y; K) \xrightarrow{i_*}.$$

This fact enables us to generalize and strengthen as well as to give a new simple proof of the *Sitnikov duality theorem* [11].

COROLLARY *(Sitnikov duality theorem). Let X be a metrizable homology n-manifold over K and Y an arbitrary subset of X, such that $H_p(X; K) = H_{p+1}(X; K) = 0$. If X is compact then $H_p^c(Y; K) = H^{n-p-1}(X - Y; \mathcal{T})$ and $H_p^c(X - Y; K) = H^{n-p-1}(Y; \mathcal{T})$. If X is not compact then in the duality the compact supports for the homology may be replaced by the families $\Phi|Y$ and $\Phi|X - Y$, respectively, where Φ is the family of closed subsets of X.*

If Y is an arbitrary finite dimensional separable metric space, then it may be embedded in some n-dimensional sphere for some n. SITNIKOV'S proof of the corollary and the proof given above show that Sitnikov homology obtained from strengthened Vietories cycles is isomorphic to the direct limit of the Borel-Moore homology groups of the compact subsets of Y, $H_p^c(Y; K)$. We should also call attention to the Wilder-Kaplan form of the Poincaré duality for arbitrary subsets of an $n - gm$, see [12; ch. VIII, 9.1]. This differs from the Sitnikov form.

7. The Lefschetz duality theorem

For a relevant discussion of the properties of $n - gm$'s with boundaries the reader can refer to [10]. It is easy to see that if X is an $n - gm$ with boundary B over K then $H_p^c(X, X - x; K) = 0$, for all $x \in B$, all p. The Lefschetz duality theorem relates the cohomology of X with the homology of X mod B. It is usually assumed that there exists neighborhoods of B in X homeomorphic to $B \times$(unit interval). The next theorem shows that this assumption is unnecessary.

THEOREM 6. *Let X be an $n - gm$ with boundary B over K. Then $H_p^c(X; K) = H_p^c(X - B; K) \approx H_c^{n-p}(X - B; \mathcal{T})$ and $H^p(X; K) = H^p(X - B; K)$. Furthermore, if $X - B$ is orientable then $H^p(X; K) = H^p(X - B; K) \cong H_{n-p}(X, B; K) = H_{n-p}(X - B; K)$.*

Proof. The space X satisfies a Poincaré type of duality. In fact $H_p^c(X, X - B; K) = H_c^{n-p}(B; \mathcal{T})$. But $\mathcal{T}|B = 0$. Thus, $H_p^c(X, X - B; K) = 0$ for all integers p. Since X is hlc, $H^p(X, X - B; K) = 0$ for all integers p by Theorem 1. This implies that i^*: $H^p(X; K) \to H^p(X - B; K)$ and i_*: $H_p^c(X - B) \to H_p^c(X; K)$ are isomorphisms. The theorem now follows from the isomorphisms i_* and i^* and Poincaré duality.

We should point out that in the course of the proof we have shown that for an $n - gm$ X with boundary B, $I_B^p(X; K) = H^p(B; K)$. In addition, it follow that if X is paracompact $I_p(X - B; K) = H_{p-1}(B; K)$ where $I_p(X - B; K)$

is homology of the ideal boundary as defined in [9]. In particular, this answers a question I raised in [9; 6.2]. It also shows that the homology and cohomology of the boundary of an $n-gm$ X with boundary B is an invariant of $X-B$.

8. A problem of Conner

The groups $I_p(X;K)$ that were just mentioned in section 7 are the homology dual of the groups $I^p(X;K)$ defined by CONNER in [4]. It follows by [9; Theorem 2.16] that $I_p(X;K)=H_p^c(X', X'-\infty)$, $p>1$, where X' is the one point compactification of X by ∞. CONNER has asked what is the relationship between $I_p(X;K)$ and a group $I'_{p-1}(X;K)=\operatorname{Inv}\lim\{H^c_{p-1}(X-U_\lambda;K)\}$ where $\{U_\lambda\}$ is the family of open sets of X having compact closures. (In general the groups are not isomorphic.) From [9; Lemma 4.4] it follows that if X is *clc* and $\dim_K X<\infty$, then the one point compactification X' is *clc* if and only if $H_c^*(X;K)$ is finitely generated. In the Corollary of [8], it is shown that if a locally compact space X is *clc* at x, then there exists a natural isomorphism Ψ of $H^c_{p+1}(X, X-x;K)$ onto $\operatorname{Inv}\lim\{\tilde{H}^c_p(U_x-x;K)\}$ for each integer p, U_x is an open neighborhood of x. Thus one obtains the following answer to CONNER's question.

THEOREM 7. *If* $\dim_K X<\infty$, *X is clc and $H_c^*(X;K)$ is finitely generated, then* $I_p(X;K)\cong I'_{p-1}(X;K)$.

References

[1] BOREL, A.: Seminar on Transformation Groups. Annals of Mathematics Studies, No. 46, Princeton 1960.

[2] BOREL, A., and J. C. MOORE: Homology theory for locally compact spaces. Michigan Math. J. **7**, 137—160 (1960).

[3] CARTAN, H.: Séminaire Henri Cartan, 3e Année **1950—51**. Secrétariat mathématique, Paris 1955.

[4] CONNER, P.: On the impossibility of fibering certain manifolds by a compact fiber. Michigan Math. J. **4**, 249—256 (1957).

[5] GODEMENT, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958.

[6] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundations of Algebraic Topology. Princeton 1952.

[7] KWUN, K. W., and FRANK RAYMOND: Generalized cells in generalized manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **11**, 135—140 (1960).

[8] RAYMOND, FRANK: A note on the local "*C*" groups of GRIFFITHS. Michigan Math. J. **7**, 1—6 (1960).

[9] RAYMOND, FRANK: The end point compactification of manifolds. Pacific J. Math. **10**, 947—963 (1960).

[10] RAYMOND, FRANK: Separation and union theorems for generalized manifolds with boundary. Michigan Math. J. **7**, 7—21 (1960).

[11] SITNIKOV, K.: The duality law for non-closed sets. Doklady Akad. Nauk SSSR **81**, 359—362 (1951).

[12] WILDER, R. L.: Topology of Manifolds. Amer. Math. Soc. Coll. publication **32** (1949).

Institute for Advanced Study, Princeton, N.J. (U.S.A.)

(Eingegangen am 3. August 1960)

Marcus, S.
Math. Zeitschr. 76, 42—45 (1961)

Les approximations diophantiennes et la catégorie de Baire

En hommage à Monsieur Oskar Perron, pour son 80ième anniversaire

Par

Solomon Marcus

Il y a dans la théorie des approximations diophantiennes beaucoup de théorèmes concernant l'ensemble des nombres jouissant de telle ou telle propriété, qui utilisent la mesure ou le nombre cardinal. Je me propose, dans ce qui suit, de signaler deux théorèmes qui font intervenir la catégorie de Baire. Le théorème 1, quoique non explicité, résulte, sans difficulté, de la démonstration du théorème 22 de [6], si l'on tient compte que la partie commune d'une infinité dénombrable d'ensembles ouverts partout denses est un ensemble résiduel. Le théorème 2 peut être aussi établi par considérations de la théorie des nombres, comme nous l'indiquons ci-dessous. Mais nous voulons montrer — et c'est précisément le but de cette note — que ces théorèmes peuvent être déduits d'un résultat tout-à-fait étranger à la théorie des nombres, à savoir du

Théorème de M. K. Fort jr.: Si les points de discontinuité d'une fonction réelle, définie sur un intervalle réel quelconque, forment un ensemble partout dense sur cet intervalle, alors les points de dérivabilité de la fonction forment un ensemble de première catégorie. ([3]; voir aussi [2] et [8]).

Théorème 1. *Soit f une fonction réelle, définie et positive pour $x>0$. Les nombres réels ξ tels que l'inégalité*

$$|\xi - p/q| < f(q) \tag{1}$$

ait seulement un système fini de solutions en nombres entiers p et q $(q>0)$, forment un ensemble de première catégorie.

Démonstration. Soit φ une fonction positive pour $x>0$ et telle que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0. \tag{2}$$

Considérons la fonction F suivante: $F(x)=0$ si x est irrationnel, $F(p/q)=\varphi(q)$ si p et q sont des entiers positifs, premiers entre eux. F est discontinue en chaque point rationnel, donc, en vertu du théorème de M. K. Fort jr., ses points de dérivabilité forment un ensemble D de première catégorie. Désignons par N l'ensemble des nombres ξ tels que l'inégalité (1) ait seulement un

système fini de solutions en nombres entiers p et $q\,(q>0)$ et soit N_1 l'ensemble des points irrationnels de N. Nous allons montrer que $N_1<D$. Soit, en effet, $\xi\in N_1$. Pour chaque suite $\{p_n/q_n\}$ de nombres rationnels tendant vers ξ il y a un entier positif n_1 tel qu'on ait

$$|\xi - p_n/q_n| \geqq f(q_n) \quad \text{pour} \quad n>n_1. \tag{3}$$

Pour x irrationnel, on a

$$\frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi}=0. \tag{4}$$

D'autre part, en vertu de (3), on a, pour chaque $n>n_1$,

$$\left|\frac{F(p_n/q_n)-F(\xi)}{p_n/q_n-\xi}\right| \leqq \frac{\varphi(q_n)}{f(q_n)}$$

d'où, en tenant compte de (2), (4) et du fait que

$$\lim_{n\to\infty} q_n = +\infty$$

on déduit que F est dérivable en ξ $\big(F'(\xi)=0\big)$, donc $N_1<D$. $N-N_1$ étant dénombrable et D étant de première catégorie, il s'ensuit que N est de première catégorie.

Remarque 1. Dans le cas particulier $f(x)=1/x^{\varepsilon}$, avec $\varepsilon>2$, l'ensemble N contient tous les nombres irrationnels algébriques, en vertu d'un théorème de K. F. Roth de [*10*].

Remarque 2. Il y a des cas où le complémentaire de N est de mesure nulle. Tel est le cas, par exemple, si $x^2f(x)$ est continue, positive et non croissante sur $(0, +\infty)$ et l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$$

est convergente. Voir, pour cela, un théorème de [*5*].

Remarque 3. Soit φ une fonction positive pour $x>0$ et telle que $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0$. De la démonstration du théorème 1 on déduit, en prenant $f(x)\equiv 1$, que les nombres ξ tels que

$$\lim_{p/q\to\xi}\frac{\varphi(q)}{p/q-\xi}=0$$

forment un ensemble de première catégorie.

Remarque 4. D'après un théorème de Hurwitz, on sait que, pour chaque nombre irrationnel x, l'inégalité

$$|x-p/q|<\frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$$

est satisfaite pour une infinité de paires de nombres entiers p et q $(q>0)$; $\sqrt{5}$ est ici la meilleure valeur possible [*4*].

Désignons, avec O. PERRON, par $M(x)$ la borne supérieure des nombres c tels que l'inégalité

$$|x - p/q| < \frac{1}{c\,q^2}$$

ait une infinité de solutions en nombres entiers p et q $(q>0)$. D'après un théorème de O. PERRON, $M(x)$ est fini pour chaque nombre irrationnel x dont les éléments du développement en fraction continue forment un ensemble borné, tandis que, pour tout autre x, $M(x)=+\infty$ [9]. D'après un théorème de BOREL, l'ensemble des nombres dont les éléments du développement en fraction continue forment un ensemble borné, est de mesure nulle [1]. En combinant ces deux théorèmes, on obtient:

Les nombres réels x pour lesquels $M(x)$ est fini forment un ensemble de mesure nulle.

Je vais compléter ce résultat par son analogue descriptif:

THÉORÈME 2. *L'ensemble E des nombres réels x pour lesquels $M(x)$ est fini, est de première catégorie.*

DÉMONSTRATION. Le théorème 2 peut être déduit à l'aide du théorème de O. PERRON de [9] et de la démonstration du théorème de BOREL de [1]. Dans cette dernière, on montre, en fait, que l'ensemble E des nombres réels, dont les éléments du développement en fraction continue forment un ensemble borné, est du type borélien F_σ. Du fait que E est de mesure nulle, il s'ensuit que E est un ensemble frontière. Mais un ensemble frontière, du type F_σ, est de première catégorie (Voir, par exemple, [7], p. 49).

La catégorie de l'ensemble E peut être établie aussi à l'aide du théorème 1 ci-dessus. Désignons, pour cela, par E_n l'ensemble des nombres irrationnels x tels que $M(x)<n$. L'ensemble $E - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, étant formé de nombres rationnels, est dénombrable, donc tout revient à montrer que E_n est de première catégorie pour chaque n entier positif. Soit, pour cela, $\xi \in E_n$. Il s'ensuit que l'inégalité

$$|\xi - p/q| < \frac{1}{n\,q^2}$$

a seulement un nombre fini de solutions en nombres entiers p et q $(q>0)$. Faisant usage du théorème 1, avec $f(x)=1/n\,x^2$, on déduit que E_n est de première catégorie.

REMARQUE 5. L'ensemble E a la puissance du continu. On a, par exemple, le résultat suivant de O. PERRON: Les nombres x tels que $M(x)=3$ forment un ensemble ayant la puissance du continu [9].

REMARQUE 6. Du théorème 1 et de la Remarque 2 on déduit que la catégorie de Baire, contrairement à la mesure de Lebesgue, est un instrument incapable de fournir une différentiation de nature globale, en ce qui concerne les divers modes d'approximation des nombres irrationnels par des rationnels. Ainsi, cette note, en attirant l'attention sur la catégorie de Baire, montre en même temps son inutilité dans la théorie des approximations diophantiennes, du moins pour le cercle de problèmes traités ci-dessus.

Mais la possibilité d'obtenir des résultats de la théorie des nombres à l'aide des théorèmes concernant la mesure, la catégorie, la puissance et le type borélien des ensembles liés à la dérivabilité des fonctions, mérite, sans doute, des recherches ultérieures.

Références

[1] Borel, E.: Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. mat. Palermo **27**, 247—271 (1909).

[2] Ćetković, Simon: Un théorème de la théorie des fonctions. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris **245**, 1692—1694 (1957).

[3] Fort jr., M. K.: A Theorem concerning functions discontinuous on a dense set. Amer. Math. Monthly **58**, 408—410 (1951).

[4] Hurwitz, A.: Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Annalen **39**, 279—284 (1891).

[5] Khintchine, A.: Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. Math. Annalen **92**, 115—125 (1924).

[6] Khintchine, A.: Fractions continues. [En russe.] Moscou 1949.

[7] Kuratowski, C.: Topologie. I. Warszawa-Wroclaw 1948.

[8] Marcus, S.: Points de discontinuité et points de dérivabilité. [En russe.], Revue Math. pures et appl. **2**, 471—473 (1957).

[9] Perron, Oskar: Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. I. S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1921, Abh. 4; II. S.-B. Heidelberg Akad. Wiss. 1921, Abh. 8.

[10] Roth, K. F.: Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika. **2**, 1—20 (1955).

Institut de Mathématiques de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest

(Eingegangen am 4. August 1960)

Schmidt, H.
Math. Zeitschr. 76, 46–50 (1961)

Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen

Von

Hermann Schmidt

Die hier behandelte Frage nach der allgemeinen Lösung eines gewissen Systems von Funktionalgleichungen, dem die sogenannten „zyklischen Funktionen" genügen (vgl. unten (3), (6)) wurde von Herrn Gheorghiu aufgeworfen, mit dem ein Briefwechsel stattgefunden hat. Wir benützen geläufige Methoden der Theorie der linearen Differentialsysteme in Matrixschreibweise, wobei ein Satz von Polya [6] eine entscheidende Rolle spielt. In einem Zusatz gibt Herr Gheorghiu eine Lösung für den Fall $n=3$ mittels eines von Roşculeţ betrachteten hyperkomplexen Systems (der enge Zusammenhang mit den Matrizenmethoden liegt auf der Hand) unter Berufung auf einen Satz von Sierpinski [9].

Es sei $A=(a_{\nu\lambda})$ eine n-reihige quadratische Matrix mit Elementen aus einem Körper K. Eine solche Matrix heißt zyklisch, wenn für

$$\nu=1,2,\ldots n-1,\ \lambda=1,2,\ldots,n$$

$$a_{\nu+1,\lambda}=a_{\nu,\lambda-1}; \tag{1}$$

dabei sind alle Zeiger auf kleinste positive Reste mod n zurückgeführt zu denken. Eine zyklische Matrix ist demnach durch ihre erste Zeile $(a_{1\lambda})=(a_\lambda)$ vermöge

$$a_{\nu\lambda}=a_{\lambda-\nu+1} \tag{2}$$

festgelegt, woraus nebenbei auch die Gültigkeit von (1) für $\nu=n$ folgt. Bezeichnet insbesondere D die zyklische Permutationsmatrix $D=(\delta_{\nu,\lambda-1})$ (Kroneckersches Symbol; Indizes stets mod n), so drückt sich (1) aus durch

$$DA=AD \tag{1'}$$

und (2) durch die (zeilenweise zu verstehende) Beziehung

$$(a_{\nu\lambda})=(a_\varkappa)\,D^{\nu-1}\qquad(\nu=1,2,\ldots,n), \tag{2'}$$

oder auch durch

$$A=\sum_{\varkappa=1}^{n}a_\varkappa D^{\varkappa-1}. \tag{2''}$$

Somit bilden die zyklischen Matrizen der festen Zeilenzahl n mit Elementen aus K eine Algebra, den Gruppenring zur endlichen zyklischen Gruppe ihrer Basiselemente $D^{\varkappa-1}$ $(\varkappa=1,2,\ldots n)$; sie enthält wegen (1') mit jeder nichtsingulären Matrix auch deren Kehrwert. Ist K bewertet, etwa der Körper

der reellen oder komplexen Zahlen mit der üblichen Betragbewertung, so enthält sie mit jeder (elementweise) konvergenten Folge auch deren Grenzwert.

Es bedeute nun $(u_\nu) = u$ eine einzeilige Matrix (reell- oder komplexwertiger) Funktionen einer (reellen oder komplexen) Veränderlichen x; ist dann $u = (f_\nu(x))$ jene Lösung des linearen Differentialsystems

$$\frac{du}{dx} = uD, \tag{3}$$

die der Anfangsbedingung $f_\nu(0) = \delta_{1\nu}$ entspricht, so heißen (vgl. Rey Pastor [5]) die $f_\nu(x)$ die (hyperbolischen) zyklischen Funktionen. Für $n = 2$ erhält man ch x, sh x, für $n = 3$ die drei Appellschen ([1], [10]) Funktionen ap x, cp x, sp x. Die durch die Zeile $(f_\nu(x))$ nach (2) festgelegte zyklische Matrix $U(x)$ ist wegen (2′) die durch $U(0) = E\ (= (\delta_{\nu\lambda}))$ festgelegte Integralmatrix des Systems (3) $\left(\text{Normallösung von } \frac{d}{dx} U = UD\right)$.

Ist jetzt A *beliebig konstant*, und $U(x)$ die Normallösung von

$$\frac{d}{dx} U = UA, \tag{4}$$

so gilt bekanntlich die Matrixgleichung

$$U(x+y) = U(x) \cdot U(y) = U(y) \cdot U(x). \tag{5}$$

(Für festes y steht rechts wie links ein Fundamentalsystem, und diese stimmen für $x = 0$, also überall überein; überdies sind U und A vertauschbar.) Für $A = D$ ergibt sich daraus (1. Zeile) das *Additionstheorem der zyklischen Funktionen*

$$f_\nu(x+y) = \sum_{\varkappa=1}^{n} f_\varkappa(x)\, f_{\nu-\varkappa+1}(y). \tag{6}$$

(6) ist aber auch dann erfüllt, wenn A eine *beliebige konstante zyklische* Matrix, und $(f_\nu(x))$ dann die 1. Zeile der Normallösung von (4) bedeutet. Denn die letztere ist

$$U = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m x^m}{m!} = e^{xA} = \prod_{\varkappa=1}^{n} \exp\left(a_\varkappa x D^{\varkappa-1}\right),$$

also nach den vorausgeschickten Bemerkungen über zyklische Matrizen mit A zyklisch (wie man übrigens auch ohne Benützung der Reihenentwicklung aus (1′) und (2′) schließen kann), so daß aus (5) auch jetzt (6) folgt, worin die speziellen Koeffizientenwerte in A nicht eingehen. Es gilt also

Satz 1. *Ist A eine beliebige zyklische Matrix mit reellen oder komplexen, konstanten Elementen, so erfüllt die der Anfangsbedingung $u_\nu(0) = \delta_{1\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ genügende Lösung von $\frac{du}{dx} = uA$ das Additionstheorem* (6).

Bis zu einem gewissen Grade kann man nun auch die Gesamtheit der Lösungen von (6) überblicken. Man hat

SATZ 2. *Erfüllt das (reell- oder komplexwertige) Funktionssystem* $f_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ -\infty < x < +\infty)$ *die Funktionalgleichungen* (6), *ist ferner* $f_\nu(x)$ *bei* $x = 0$ *stetig, und die Determinante der zyklischen Matrix* $U = \left(f_{\lambda-\nu+1}(x)\right)$ *daselbst* $\neq 0$, *so ist* $\left(f_\nu(x)\right)$ *die Anfangszeile der Normallösung eines Systems* (4) *mit konstanter, zyklischer Koeffizientenmatrix.*

Dies folgt aus einem Satz von PÓLYA ([6], [8]). Durch Rechtsmultiplikation der Zeile (6) mit $D^{\mu-1}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n)$ ergibt sich nämlich wegen (2') und (1') sofort (5) für die jetzt zu betrachtende Matrix U. Also ist nach POLYA U Normallösung eines Systems (4) mit festen Koeffizienten, und wegen $A = U^{-1}\frac{dU}{dx}$ ist A wieder zyklisch, w.z.b.w.

Vermöge $u = e^{\alpha x} z$ und $\beta x = t$ geht übrigens (4) über in

$$\frac{dZ}{dx} = Z(A - \alpha E) : \beta \qquad (\beta \neq 0);$$

in A kann also $a_{\nu\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und ferner ein von Null verschiedenes Glied a_λ gleich 1 angenommen werden. Für $n = 2$ kann also $A = D$, für $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma \\ \gamma & 0 & 1 \\ 1 & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Die (im Sinne von Satz 2) allgemeine Lösung wird dann für $n = 2$ $e^{\alpha x}\,\mathrm{ch}\,\beta x$, $e^{\alpha x}\,\mathrm{sh}\,\beta x$, für $n = 3$ aber erhält man nur bei der speziellen Wahl $\gamma = 0$ die mit den Appellschen Funktionen ([1], [10]) gebildete Lösung $e^{\alpha x}$ $(\mathrm{ap}\,\beta x,\ \mathrm{cp}\,\beta x,\ \mathrm{sp}\,\beta x)$. Für $\gamma = -1$ geht z.B. (mit $\alpha = 0$, $\beta = 1$) hervor

$$(7) \qquad \begin{cases} 3f_1(x) = 1 + 2\cos\sqrt{3}\,x, \quad 3f_2(x) = 1 + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,x - \cos\sqrt{3}\,x, \\ 3f_3(x) = 1 - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}\,x - \cos\sqrt{3}\,x. \end{cases}$$

Hier kann man sich durch unmittelbare Rechnung von der Gültigkeit von (6) überzeugen.

Betrachtet man anstatt der zyklischen Matrizen die Matrizen der Form $'A = (\sigma_{\nu\lambda}\, a_{\lambda-\nu+1})$, wobei gesetzt werden soll

$$\left.\begin{array}{rl} \sigma_{\nu\lambda} = +1 & \text{für } 1 \leqq \nu \leqq \lambda \leqq n \\ -1 & \text{für } 1 \leqq \lambda < \nu \leqq n \end{array}\right\} \text{(Indizes außerhalb dieser Grenzen hier ausgeschlossen!)},$$

oder also

$$(8) \qquad 'A = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_\varkappa\, 'D^{\varkappa-1} \quad \text{mit} \quad 'D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & & \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

so bilden sie wieder eine Algebra. Den hyperbolischen zyklischen Funktionen $f_\nu(x)$ entsprechen die zirkulären Funktionen:

$$g_\nu(x) = \delta^{-\nu+1} f_\nu(\delta x), \qquad \delta = e^{\frac{\pi i}{n}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n;\ n=2\text{: Kreisfunktionen}),$$

die die Anfangszeile der Normallösung von $\frac{d}{dx} U = U \cdot {}'D$ bilden. Man sieht, daß bei Ersetzung von D durch ${}'D$ (1') und (2') gültig bleiben, daß die Funktionalgleichungen gelten

$$g_\nu(x+y) = \sum_{\varkappa=1}^{\nu} g_\varkappa(x)\, g_{\nu-\varkappa+1}(y) - \sum_{\varkappa=\nu+1}^{n} g_\varkappa(x)\, g_{n+\nu-\varkappa+1}(y), \tag{9}$$

und wieder Satz 1 und Satz 2 entsprechende Sätze ausgesprochen werden können, die aus jenen durch die Ersetzung $A \mid {}'A$ und von (6) durch (9) hervorgehen.

Zusatz von Octavian Em. Gheorghiu, *Timişoara*

Führen wir die hyperkomplexe Funktion Z der reellen Variablen x

$$Z(x) = f(x) + \Theta g(x) + \Theta^2 h(x); \qquad \Theta^3 - 1 = 0$$

ein, so ist die obige Matrixgleichung (5) mit

$$U = \begin{pmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ h(x) & f(x) & g(x) \\ g(x) & h(x) & f(x) \end{pmatrix}$$

gleichwertig mit der hyperkomplexen Funktionalgleichung

$$Z(x+y) = Z(x) \cdot Z(y),$$

welche nichts anderes als Cauchys Gleichung ist, und deren allgemeine Lösung nach Sierpinski [9] durch $Z(x) = e^{\alpha x} e^{\Theta \beta x} e^{\Theta^2 \gamma x}$ mit reellen willkürlichen Konstanten gegeben ist[1]). Die drei reellen Komponenten sind

$$f(x) = e^{\alpha x} P(\beta x, \gamma x); \qquad g(x) = e^{\alpha x} Q(\beta x, \gamma x); \qquad h(x) = e^{\alpha x} R(\beta x, \gamma x), \tag{10}$$

wo P, Q, R die Appellschen Funktionen [1] sind, welche auch Devisme [3] und Boşçuleţ [7] benutzt haben. Die Appellschen Funktionen P, Q, R von zwei Argumenten drücken sich mit Hilfe der zyklischen Appellschen Funktionen eines Arguments $\operatorname{ap} x$, $\operatorname{cp} x$ und $\operatorname{sp} x$ folgendermaßen aus:

$$\big(P(\beta x, \gamma x),\ Q(\beta x, \gamma x),\ R(\beta x, \gamma x)\big) = \big(V(\beta x)\, \widetilde{V}(\gamma x)\big)_{1.\,\text{Zeile}}, \tag{11}$$

wo $V(x)$ die zyklische Matrix mit der Anfangszeile ($\operatorname{ap} x$, $\operatorname{cp} x$, $\operatorname{sp} x$), $\widetilde{V}(x)$ deren Transponierte bedeutet.

Demnach ist die allgemeine Lösung des Systems (5) für $n=3$ durch (10) gegeben, worin die Werte (11) einzutragen sind.

[1]) Vgl. auch Nagumo, Jap. J. Math. **13** (1936), § 5, S. 72. (H. Sch).

Literatur

[1] Appell, P.: Sur certaines fonctions analogues aux fonctions circulaires. Comptes Rendus Ac. Sci. Paris **84**, 1378 (1877).

[2] Babini: Sobre los ceros de las funciones cíclicas. Publ. Fac. Ci. exact. Fis. Nat., Buenos Aires B Nr. **12** (1932).

[3] Devisme, J.: Ann. Fac Sci. Toulouse (III) **25**, 143—237 (1933).

[4] Knoll, F.: Die zyklischen Funktionen und damit zusammenhängenden lineare Operatoren. Deutsche Math. **1**, 156—162 (1936).

[5] Rey Pastor: Theoria de las fonctiones cíclicas. Boletin Sem. mat. Argentino. Buenos Aires Nr. **4** (1929).

[6] Pólya, G.: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizenkalkül. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Berlin **1928**, 96—99.

[7] Roşculeţ, M.: Studii si cercetări matematice **5**, Nr. 3—4, 361—401 (1954) (teză prezentată 1949, Bucureşti).

[8] Schwerdtfeger, H.: Les fonctions de matrices. Act. sci. et industr. **649**, § 8, S. 45 (1938).

[9] Sierpinski: Fundamenta Math. **1**, 116—122, 125—129 (1920).

[10] Wallner, K.: Die Funktion $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{3i}}{(3i)!}$ und ihre Abgeleiteten. Programm Realschule Rothenburg o. d. T., Nürnberg, Bieling-Dietz, 1913 (mit Verzeichnis älterer Literatur).

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. August 1960)

Sanders, B. L.
Math. Zeitschr. 76, 51—55 (1961)

Concerning a Theorem of Ky Fan's

By
B. L. Sanders[1]

§ 1. Introduction

Definition 1. Let f be a mapping of the set A into itself. A subset Q of A is an *invariant subset of* A with respect to the mapping f provided $f(Q) = Q$. The set Q is the *maximal invariant subset of* A with respect to f provided Q is an invariant subset of A with respect to f and every invariant subset of A with respect to f is a subset of Q.

Definition 2. The set $\{B, C\}$ is a *decomposition of* A provided $A = B \cup C$ and $B \cap C$ is empty. (Either B or C or both may be empty.)

Definition 3. Let $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ be a finite number of infinite sets arranged in cyclic order $(A_{n+1} = A_1)$. For each $i = 1, \ldots, n$ let f_i be a one-to-one mapping of A_i into A_{i+1}. The sets A_i with the mappings f_i have *property* K provided there exists a decomposition $\{B_i, C_i\}$ of each A_i such that

$$f_i(B_i) = C_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{and} \quad f_n(B_n) = C_1.$$

Notation. Let $F_i = f_n \cdots f_i$, F_1^k for k an integer greater than one denote F_1 followed by itself $k-1$ times, and F_1^0 be the identity.

Ky Fan [2] has shown that any finite collection of infinite sets $A_1, \ldots, A_n$ arranged in cyclic order and one-to-one mappings f_i that take A_i into A_{i+1} have property K when n is even. A. Froda [3] has pointed out that such is not in general the case when n is odd. The purpose of this paper is to discuss necessary and sufficient conditions for such sets and mappings to have property K when n is odd. To this end we state for reference purposes the following theorem which is embodied (though not stated explicity as a theorem) in the paper by Ky Fan referred to above.

Theorem 1. *Let $A_1, \ldots, A_n$ be a finite collection $(n \geqq 2)$ of infinite sets arranged in cyclic order. For each $i = 1, \ldots, n$ let f_i be a one-to-one mapping of A_i into A_{i+1}. The sets A_i and the mappings f_i have property K if and only if there exists a decomposition $\{B_1, C_1\}$ of A_1 such that*

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 - B_1 = [F_n(A_n) - F_{n-1}(A_{n-1})] \cup [F_{n-2}(A_{n-2}) - F_{n-3}(A_{n-3})] \\ \qquad\qquad \cup \cdots \cup [F_2(A_2) - F_1(B_1)] \qquad \text{for } n \text{ even} \end{cases}$$

[1]) This paper was prepared under contract No. AF 49(638)-598 with the United States Air Force Office of Scientific Research. The author would like to express his gratitude to R. L. Plunkett, Paul J. McCarthy, and J. W. Ellis for their advice and encouragement in connection with this research.

and

$$(2)\qquad \begin{cases} A_1 - B_1 = [F_n(A_n) - F_{n-1}(A_{n-1})] \cup [F_{n-2}(A_{n-2}) - F_{n-3}(A_{n-3})] \\ \qquad\qquad \cup \cdots \cup [F_3(A_3) - F_2(A_2)] \cup F_1(B_1) \qquad \textit{for } n \textit{ odd.} \end{cases}$$

§ 2. Main Results

THEOREM 2. *If $n(\geqq 3)$ is an odd integer a necessary condition that the collection $A_1, \ldots, A_n$ of infinite sets and the one-to-one mappings f_i of A_i into A_{i+1}, $i=1, \ldots, n$ have property K is that every subset Q of A_1 which is invariant with respect to the mapping F_1 has a decomposition $\{Q', Q''\}$ such that*

$$(3)\qquad F_1(Q') = Q''.$$

PROOF. Let Q be any subset of A_1 which is invariant with respect to F_1. If Q is empty ($Q=\emptyset$), the decomposition $\{\emptyset, \emptyset\}$ satisfies (3). If Q is not empty, we define Q' and Q'' in the following manner. By hypothesis the sets $A_1, \ldots, A_n$ with the mappings $f_1, \ldots, f_n$ have property K. Thus by Theorem 1 there exists a decomposition $\{B_1, C_1\}$ of A_1 which satisfies (2). Let

$$(4)\qquad Q' = B_1 \cap Q \quad \text{and} \quad Q'' = C_1 \cap Q.$$

Clearly $\{Q', Q''\}$ is a decomposition of Q, and it is sufficient to show that (3) is satisfied.

Since $Q' \subset B_1$, $f_1(Q') \subset f_1(B_1) = C_2$. Thus $f_1(Q') \cap B_2 = \emptyset$. Hence $f_2 f_1(Q') \cap f_2(B_2) = \emptyset$, and since $f_2(B_2) = C_3$ and $\{B_3, C_3\}$ is a decomposition of A_3, we have that $f_2 f_1(Q') \subset B_3$. Since n is odd, we obtain, after a finite number of steps, that $F_1(Q') \subset C_1$. Since $Q' \subset Q$, $F_1(Q') \subset F_1(Q) = Q$. Hence

$$(5)\qquad F_1(Q') \subset [C_1 \cap Q] = Q''.$$

Similarly one may show that

$$(6)\qquad F_1(Q'') \subset Q'.$$

Since Q is not empty and $Q = Q' \cup Q''$, (5) and (6) are seen to imply that neither Q' nor Q'' is empty. We wish to show that

$$(7)\qquad F_1 \text{ maps } Q' \text{ onto } Q''.$$

To this end assume the contrary. Thus since $Q'' \neq \emptyset$, there exists an $x \in Q'' - F_1(Q')$. Since $F_1(Q) = Q$ and $x \in Q$, there exists a $y \in Q$ such that $F_1(y) = x$. Since $x \notin F_1(Q')$, $y \in Q''$. Thus $x = F_1(y) \in F_1(Q'')$. Hence by (6), $x \in Q'$. However, this is impossible since x was chosen in Q'' and $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Thus (7) is verified and (5) and (7) establish (3).

REMARK. It is noted in [2] that

$$(8)\qquad A_1 \supset F_n(A_n) \supset F_{n-1}(A_{n-1}) \supset \cdots \supset F_1(A_1) \supset F_1 F_n(A_n) \supset \cdots$$

and is shown that in the case of even n, (1) is satisfied by $B_1 = S$ where

$$(9)\qquad \begin{cases} S = [A_1 - F_n(A_n)] \cup [F_{n-1}(A_{n-1}) - F_{n-2}(A_{n-2})] \\ \qquad \cup \cdots \cup [F_2(A_2) - F_1(A_1)] \cup \cdots. \end{cases}$$

The set S is the union of a denumerable collection of sets in which the k-th set is the complement of the $2k$-th set of (8) with respect to the $(2k-1)$-th set of (8).

THEOREM 3. *If $n(\geq 3)$ is an odd integer a sufficient condition that the infinite sets $A_1, \ldots, A_n$ and the one-to-one mappings f_i of A_i into A_{i+1} have property K is that the maximal invariant subset Q of A_1 with respect to the mapping F_1 has a decomposition $\{Q', Q''\}$ such that*

$$F_1(Q') = Q''. \tag{10}$$

PROOF. It is easy to verify that the maximal invariant subset Q of A_1 with respect to the mapping F_1 is given by

$$Q = \bigcap_{k=0}^{\infty} F_1^k(A_1). \tag{11}$$

(Compare [1].) Either $Q = 0$ or $Q \neq 0$. Consider first the case in which $Q = 0$. We define $B_1 = S$. (Note that this is exactly the same definition for B_1 as used in [2] for the case of even n.)

We wish to show that B_1 satisfies (2). We first show that the right-hand side of (2) is contained in the left-hand side of (2). Let x belong to the right-hand side of (2). Two possibilities exist: either

(i) $x \in [F_j(A_j) - F_{j-1}(A_{j-1})]$ where j is an odd integer such that $3 \leqq j \leqq n$,

or

(ii) $x \in F_1(B_1)$.

Consider case (i) first. Since j is odd, $j-1$ is even and from (9) we see that $H = [F_{j-1}(A_{j-1}) - F_{j-2}(A_{j-2})]$ is a term of B_1. By (i) $x \notin F_{j-1}(A_{j-1})$. Hence $x \notin H$. Further every term to the right of H in B_1 is by (8) a subset of $F_{j-1}(A_{j-1})$. Thus x does not belong to H nor to any term to the right of it in B_1. Consider the terms to the left of H in B_1. In each such term the set removed (that is, the second set) contains $F_j(A_j)$ and hence by (i) contains x. Thus x cannot belong to any term to the left of H in B_1. Thus x does not belong to B_1. By (i), $x \in A_1$, and thus $x \in A_1 - B_1$.

Consider next case (ii). From (9) we see that two possibilities exist: either

(I) $$x \in [F_1^k(A_1) - F_1^k F_n(A_n)], \text{ where } k \geqq 1$$

or

(II) $$x \in [F_1^k F_i(A_i) - F_1^k F_{i-1}(A_{i-1})], \text{ where } k \geqq 1 \text{ and } 2 \leqq i \leqq n.$$

In each case we look at the term of B_1 which gave rise to the term of $F_1(B_1)$ under consideration. Then we go to the $\binom{n+1}{2}$-th term of B_1 to the right of this term. This gives sets of the following types respectively:

(I') $$[F_1^k F_n(A_n) - F_1^k F_{n-1}(A_{n-1})],$$

(II') $$[F_1^k F_{i-1}(A_{i-1}) - F_1^k F_{i-2}(A_{i-2})] \quad \text{if } 2 < i \leqq n, \text{ and}$$
$$[F_1^k F_1(A_1) - F_1^k F_1 F_n(A_n)] \quad \text{if } i = 2.$$

In each case letting this final set correspond to H in case (i) and using an argument similar to the one there, we see that x cannot belong to this set nor to any term to the right or left of it in B_1. Hence in this case also $x \in A_1 - B_1$ and we have established that the right-hand side of (2) is contained in the left-hand side.

We now establish that the left-hand side of (2) is contained in the right-hand side. From (9) we obtain by appropriate set operations

$$(12) \qquad \begin{cases} A_1 - B_1 = F_n(A_n) \cap \{[A_1 - F_{n-1}(A_{n-1})] \cup F_{n-2}(A_{n-2})\} \\ \qquad\qquad \cap \{[A_1 - F_{n-3}(A_{n-3})] \cup F_{n-4}(A_{n-4})\} \\ \qquad\qquad \cap \cdots \cap \{[A_1 - F_2(A_2)] \cup F_1(A_1)\} \cap \cdots . \end{cases}$$

Let $x \in A_1 - B_1$ and assume that x does not belong to the right-hand side of (2). Thus $x \notin [F_n(A_n) - F_{n-1}(A_{n-1})]$. By (12), $x \in F_n(A_n)$ and therefore $x \in F_{n-1}(A_{n-1})$. Hence $x \notin [A_1 - F_{n-1}(A_{n-1})]$, and from (12) we see that $x \in F_{n-2}(A_{n-2})$. By assumption $x \notin [F_{n-2}(A_{n-2}) - F_{n-3}(A_{n-3})]$, and hence $x \in F_{n-3}(A_{n-3})$. In a finite number of steps we obtain $x \in F_1(A_1)$. Suppose $x \in F_1^k(A_1)$ and k is even. Thus $x \notin [A_1 - F_1^k(A_1)]$ and since k is even, we see from (12) that $x \in F_1^k F_n(A_n)$. By (9), since $x \notin F_1(B_1)$, $x \notin [F_1^k F_n(A_n) - F_1^k F_{n-1}(A_{n-1})]$. Hence $x \in F_1^k F_{n-1}(A_{n-1})$. In a finite number of steps we obtain that $x \in F_1^{k+1}(A_1)$. If k is odd, we see from (9) that $x \notin [F_1^k(A_1) - F_1^k F_n(A_n)]$. Hence since $x \in F_1^k(A_1)$ by the inductive hypothesis, $x \in F_1^k F_n(A_n)$. As above a finite number of steps shows that $x \in F_1^{k+1}(A_1)$. Hence by induction $x \in F_1^k(A_1)$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$. Thus from (11), $Q \neq \emptyset$. This is a contradiction. Hence x does belong to the right-hand side of (2) and the proof of this case is complete.

Consider now the case in which $Q \neq \emptyset$. Either $A_1 - Q = \emptyset$, or $A_1 - Q \neq \emptyset$. If $A_1 - Q = \emptyset$, define a decomposition $\{B_1, C_1\}$ of A_1 by $B_1 = Q'$, $C_1 = Q''$. Hence $A_1 - B_1 = A_1 - Q' = Q'' = F_1(Q') = F_1(B_1)$. Further, since $F_1(A_1) = A_1$, $F_j(A_j) = A_1$ for $1 \leqq j \leqq n$, and therefore $[F_j(A_j) - F_{j-1}(A_{j-1})] = \emptyset$ for all odd j such that $3 \leqq j \leqq n$, and (2) is verfied in this instance.

Now suppose that $A_1 - Q \neq \emptyset$. Let $x_1 \in A_1 - Q$. Define a set of points by letting $x_{i+1} = F_1^i(x_1)$ for $i = 1, 2, \ldots$. The points $x_1, x_2, \ldots$ thus obtained are distinct elements of $A_1 - Q$. Hence $A_1 - Q$ is infinite.

Define

$$(13) \qquad \begin{cases} A_1' = A_1 - Q, \\ A_i' = A_i - f_{i-1} \cdots f_1(Q) \quad \text{for } i = 2, \ldots, n, \\ A_{n+1}' = A_1', \quad \text{and} \\ f_{i*} = f_i | A_i' \quad \text{for } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

It is easy to verify that $A_1', \ldots, A_n'$ is an odd number of infinite sets arranged in cyclic order, that f_{i*} is a one-to-one mapping of A_i' into A_{i+1}' for $i = 1, \ldots, n$, and that the maximal invariant subset of A_1' with respect to $F_{1*} = f_{n*} \cdots f_{1*}$ is empty. Thus by the first case considered, the sets A_i' and the mappings f_{i*}

have property K. Hence by Theorem 1, there exists a decomposition $\{B_1', C_1'\}$ of A_1' such that

$$(14)\quad A_1' - B_1' = [F_{n*}(A_n') - F_{n-1*}(A_{n-1}')] \cup \cdots \cup [F_{3*}(A_3') - F_{2*}(A_2')] \cup F_{1*}(B_1').$$

Define a decomposition $\{B_1, C_1\}$ of A_1 by letting $B_1 = B_1' \cup Q'$ and $C_1 = C_1' \cup Q''$. Now $A_1 - B_1 = [A_1' - B_1'] \cup Q''$, and since $F_{j*}(A_j') = F_j(A_j')$ for $j = 1, \ldots, n$, we get from (14) that

$$(15)\quad A_1 - B_1 = [F_n(A_n') - F_{n-1}(A_{n-1}')] \cup \cdots \cup [F_3(A_3') - F_2(A_2')] \cup F_1(B_1') \cup Q''.$$

Now $F_1(B_1') \cup Q'' = F_1(B_1') \cup F_1(Q') = F_1(B_1' \cup Q') = F_1(B_1)$. Substituting this in (15), substituting for the A_i' in (15) from (13), and simplifying, we see that (2) is satisfied and the proof is complete.

§ 3. Conclusion

Callahan and Kneale [1] have shown for $n = 2$ that a set B_1 satisfies (1) if and only if $B_1 = S \cup Q$ where S is as given in (9) and Q is some subset of A_1 which is invariant with respect to the mapping $f_2 f_1$. It seems reasonable to conjecture that a similar result holds for any even n. In the light of the results of § 2, it also seems reasonable to conjecture that if n is odd, and the sets $A_1, \ldots, A_n$ with the mappings $f_1, \ldots, f_n$ have property K, then a set B_1 satisfies (2) if and only if $B_1 = S \cup Q'$ where S is as given in (9) and Q' is a subset of the maximal invariant subset Q of A_1 with respect to $f_n \cdots f_1$ such that $f_n \cdots f_1(Q') = Q - Q'$.

References

[1] Callahan, F. P., and S. G. Kneale: A note on the Schroeder-Bernstein theorem. Amer. Math. Monthly **64**, 423–424 (1957).

[2] Fan, Ky: Note on a theorem of Banach. Math. Z. **55**, 308–309 (1952).

[3] Froda, A.: A review of [2]. Zbl. Math. **47**, 285 (1953).

Dept. of Math., Florida State Univ., Tallahassee, Fla. (U.S.A.)

(Eingegangen am 27. September 1960)

Kunz, E.
Math. Zeitschr. 76, 56—74 (1961)

Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper

Von
Ernst Kunz

Die folgende Arbeit knüpft an (unveröffentlichte) Untersuchungen von F. K. Schmidt über Differentialformen algebraischer Funktionenkörper an. F. K. Schmidt wies darauf hin, daß es für die Behandlung inseparabler algebraischer Funktionenkörper K zweckmäßig sein wird, statt der üblicherweise benutzten Differentialformen von K über dem Konstantenkörper k solche von K über k^p zu betrachten, wenn $[k:k^p]$ endlich ist. Es soll also der Körper, über dem differenziert wird (der Differentialkonstantenkörper), verschieden vom arithmetischen Konstantenkörper k gewählt werden. Von dieser Idee wird im folgenden Gebrauch gemacht.

Es wird gezeigt werden, daß die Schwierigkeiten, auf die man stößt, wenn man versucht, die Theorie der Differentialformen algebraischer Funktionenkörper auf den Fall auszudehnen, daß der Konstantenkörper k unvollkommen ist, überwunden werden können, wenn man nur einen geeignet gewählten Differentialkonstantenkörper k_0 verwendet, wobei k_0 im allgemeinen von k verschieden ist. Für die ganze Arbeit wird vorausgesetzt, daß die Charakteristik p von k von Null verschieden ist, da sich neue Resultate im wesentlichen nur für unvollkommenes k ergeben werden. Die verwendeten Differentialkonstantenkörper k_0 sind dann immer Zwischenkörper von k^p und k, für die $[k:k_0]$ endlich ist. Ist k vollkommen, dann ist $k_0 = k$. Hier erhält man aus den allgemeinen Sätzen die für vollkommenes k bekannten Sätze als Spezialfälle zurück. Ist $[k:k^p]$ endlich, so kann stets $k_0 = k^p$ gewählt werden. Dies bedeutet, daß die verwendete Differentiation von K die absolute Differentiation ist (Differentiation über dem Primkörper), da bei jeder Differentiation von K der Körper k^p in Null abgebildet wird. Auch im allgemeinen Fall, wenn $[k:k^p]$ nicht endlich ist, handelt es sich bei der Differentiation über k_0 im Grunde um die absolute Differentiation, wobei nur noch zusätzlich geeignete Elemente in Null abgebildet werden, damit man zu einem endlichen Differentialmodul gelangt. Dabei ist es weitgehend willkürlich, welche Elemente von K in Null abgebildet werden, weshalb auch der Differentialkonstantenkörper nicht eindeutig bestimmt ist. Diese Nichteindeutigkeit des Differentialkonstanenkörpers spielt aber keine große Rolle, weil sich die wichtigsten, mit Hilfe der Differentialformen gewonnenen Begriffe, nämlich die kanonische Klasse eines abstrakten Modells V von K und das geometrische Geschlecht von V als unabhängig von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers erweisen.

Bei der Darstellung des Verhaltens der Differentialformen auf abstrakten vollständigen Modellen V von K folge ich dem von ZARISKI in [7] für algebraisch abgeschlossenes k und projektive Varietäten V gegebenen Aufbau. Es zeigt sich, daß sich alle wesentlichen Sätze mühelos auf den Fall eines beliebigen Konstantenkörpers übertragen lassen. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird die Änderung der kanonischen Klasse eines abstrakten vollständigen Modells von K bei algebraischer Erweiterung von K untersucht. Es stellt sich heraus, daß die entsprechenden Verhältnisse vorliegen, wie sie für algebraische Funktionenkörper einer Variablen bekannt sind.

Durch Anwendung auf algebraische Funktionenkörper K einer Variablen ergibt sich, daß die hier definierte kanonische Klasse des singularitätenfreien Modells V von K mit der im Riemann-Rochschen Satz auftretenden kanonischen Klasse übereinstimmt. Das geometrische Geschlecht von V erweist sich als identisch mit dem Geschlecht von K. Hierin hat man die hauptsächliche Rechtfertigung für die Einführung der Differentialkonstantenkörper zu erblicken. Bei Verwendung von Differentialformen über dem arithmetischen Konstantenkörper k gelangt man auf dem hier eingeschlagenen Weg nicht zur richtigen kanonischen Klasse.

In der Arbeit werden die Grundtatsachen über die Differentialmoduln und die Kählerschen Differenten als bekannt vorausgesetzt und oft stillschweigend benutzt. Sie sind z.B. in [4] zusammengestellt. Die Differenten werden je nach Bedarf als Ideale oder Divisoren aufgefaßt, ohne daß dies in der Schreibweise unterschieden wird.

Herrn Prof. F. K. SCHMIDT möchte ich für seine wertvollen Anregungen danken, ebenso den Herren Dr. R. BERGER und Dr. H. J. NASTOLD für ihre freundlichen Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit.

§ 1. Charakterisierung regulärer geometrischer Stellenringe durch Differentiationen

Es sei k ein beliebiger Körper der Charakteristik $p > 0$ und $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ eine nullteilerfreie affine k-Algebra. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von A sei $A_\mathfrak{p}$ der zugehörige Stellenring, dessen maximales Ideal ebenfalls mit $\mathfrak{p}$ bezeichnet werde. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis von

SATZ 1. *$A_\mathfrak{p}$ ist genau dann regulär, wenn sein Differentialmodul $M(A_\mathfrak{p})$ ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul ist.*

Ein Beweis für Ringe $A_\mathfrak{p}$ mit endlichem $M(A_\mathfrak{p})$ wurde in [4], S. 177, gegeben, ebenso das Analogon zu Satz 1 im Fall, daß Char. $k = 0$ ist. Der allgemeine Beweis verläuft im Grunde analog, nur daß einige technische Schwierigkeiten zu überwinden sind. Es müssen zunächst einige Vorbemerkungen vorausgeschickt werden, auf die auch später noch zurückgegriffen wird.

Es sei A als Polynomrestklassenring von der Form $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{n}$ gegeben, wobei der Kern $\mathfrak{n}$ von den m Polynomen $F_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, F_m(X_1, \ldots, X_n)$ erzeugt werde. Ein Unterkörper k' von k, der sämtliche in den F_i $(i = 1, \ldots, m)$ auftretenden Koeffizienten enthält, heißt ein *Definitionskörper für A*. Bekanntlich gilt

HILFSSATZ 1. *$\mathfrak{n} \cap k'[X_1, \ldots, X_n]$ ist das von $F_1, \ldots, F_m$ in $k'[X_1, \ldots, X_n]$ erzeugte Ideal. Ist $\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}$ eine Basis von k über k', so ist es auch eine Basis von A über $k'[x_1, \ldots, x_n]$: $A = \bigoplus_{\mu \in M} k'[x_1, \ldots, x_n] \cdot \varkappa_\mu$.*

Es werden später nur noch Definitionskörper k' mit den folgenden beiden Eigenschaften auftreten: 1. $k^p \subseteq k'$, 2. $[k' : k^p]$ ist endlich. Wenn wir in Zukunft von Definitionskörpern sprechen, dann sind immer solche gemeint, welche die Eigenschaften 1. und 2. besitzen.

HILFSSATZ 2. *k' sei ein Definitionskörper von $A = k[x_1, \ldots, x_n]$, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ eine p-Basis von k über k' und es sei $k_0 = k^p[\{\alpha_i\}_{i \in I}]$. $\beta_1, \ldots, \beta_s$ sei eine p-Basis von k' über k^p. Dann gilt für den Differentialmodul $M(A)$ von A eine Zerlegung:*

$$M(A) = E \oplus F,$$

wobei E ein endlicher Untermodul von $M(A)$ ist, erzeugt von den Differentialen $dx_1, \ldots, dx_n, d\beta_1, \ldots, d\beta_s$, F ein freier Untermodul von $M(A)$ mit der Basis $\{d\alpha_i\}_{i \in I}$. E ist isomorph zum Differentialmodul $M(A/k_0)$ und F ist isomorph zu $A \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$, wo $M(k_0/k^p)$ den Differentialmodul von k_0 über k^p bedeutet.

BEWEIS. $\beta_1, \ldots, \beta_s$, $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ ist eine p-Basis von k über k^p. Wir schreiben $A = k^p[\beta_1, \ldots, \beta_s, x_1, \ldots, x_n, \{\alpha_i\}_{i \in I}]$ als Polynomrestklassenring über k^p in der Form $A = k^p[Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n, \{Z_i\}_{i \in I}]/\mathfrak{m}$. Im Kern $\mathfrak{m}$ kommen sicher die Polynome $Y_j^p - \beta_j^p$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $Z_i^p - \alpha_i^p$ $(i \in I)$ vor, ferner die Polynome $F_k(Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$, die man erhält, wenn man in den $F_k(X_1, \ldots, X_n)$ sämtliche Koeffizienten mit Hilfe der p-Basis $\beta_1, \ldots, \beta_s$ von k' über k^p ausdrückt und überall β_j durch Y_j ersetzt. Die genannten Polynome erzeugen aber auch $\mathfrak{m}$: Denn rechnet man zunächst modulo dem von den $Y_j^p - \beta_j^p$ $(j = 1, \ldots, s)$ und $Z_i^p - \alpha_i^p$ $(i \in I)$ erzeugten Ideal, so geht $k^p[Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n, \{Z_i\}]$ in $k[X_1, \ldots, X_n]$ über, die $F_k(Y_1, \ldots, Y_s, X_1, \ldots, X_n)$ dabei in $F_k(X_1, \ldots, X_n)$.

Für den Differentialmodul $M(A) = M(A/k^p)$ ergibt sich hieraus:

$$M(A) = \Big[\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i \oplus \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i\Big]\Big/ M_0,$$

wo M_0 der von den Elementen $\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial F_k}{\partial \beta_j} dY_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} dX_i$ $(k = 1, \ldots, m)$ erzeugte Untermodul von $\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i \oplus \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i$ ist. Da die Erzeugenden von M_0 von dZ_i frei sind, findet man

$$M(A) = E \oplus F$$

mit

$$E = \Big[\bigoplus_{j=1}^{s} A\, dY_j \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} A\, dX_i\Big]\Big/ M_0 = \sum_{j=1}^{s} A\, d\beta_j + \sum_{i=1}^{n} A\, dx_i$$

und

$$F = \bigoplus_{i \in I} A\, dZ_i = \bigoplus_{i \in I} A\, d\alpha_i.$$

Wegen $M(k_0/k^p) = \bigoplus_{i \in I} k_0\, d\alpha_i$ ist F isomorph zu $A \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$. Ferner ist $M(A/k_0) \cong M(A)/A\, dk_0 = M(A)/F \cong E$. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Folgerung. *Für jedes $A_\mathfrak{p}$ ist $M(A_\mathfrak{p}) = E_\mathfrak{p} \oplus F_\mathfrak{p}$, wo $E_\mathfrak{p}$ ein endlicher Modul isomorph zu $M(A_\mathfrak{p}/k_0)$ ist und $F_\mathfrak{p}$ der freie Modul $F_\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \in I} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i \cong A_\mathfrak{p} \otimes_{k_0} M(k_0/k^p)$.*

Wir benötigen schließlich noch den körpertheoretischen

Hilfssatz 3. *Es sei $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ ein endlicher Erweiterungskörper von k mit $\dim \frac{K}{k} = r$. $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ sei eine p-Basis von k über k^p. Dann gibt es eine p-Basis von K über K^p von folgender Art: Sie besteht aus allen Elementen y_λ $(\lambda \in \Lambda)$ mit $t \leqq n$ Ausnahmen und $t + r$ weiteren Elementen aus K.*

Beweis. Es genügt, den Beweis für $n = 1$ zu führen.

1. Fall: Es sei $K = k(x)$ und x sei transzendent über k. Dann ist $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, x eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$.

2. Fall: x sei separabel algebraisch über k. Dann ist $k(x) = k(x^p)$ und daher ist $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ auch eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$.

3. Fall: x genüge einer irreduziblen Gleichung $x^{p^e} - \varkappa = 0$ $(\varkappa \in k)$. Wir betrachten zunächst den Fall $e = 1$: $x \notin k$, $x^p \in k$. Dann gilt auch $x^p \notin k^p$, $x^{p^2} \in k^p$. Es sei $x^p \in k^p[y_{\lambda_1}, \ldots, y_{\lambda_s}]$. Wegen $x^p \notin k^p$ kann ein geeignetes der p-Basiselemente, etwa y_{λ_1}, gegen x^p ausgetauscht werden, so daß $k^p[y_{\lambda_1}, \ldots, y_{\lambda_s}] = k^p[x^p, y_{\lambda_2}, \ldots, y_{\lambda_s}]$ wird. Es folgt, daß das System $\{y_\lambda\}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_1}}$, x^p ebenfalls eine p-Basis von k über k^p bildet. Da $1, x, \ldots, x^{p-1}$ eine Basis von $k(x)$ über k bilden, ergibt sich, daß das System $\{y_\lambda\}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ \lambda \neq \lambda_1}}$, x eine p-Basis von $k(x)$ über $k^p(x^p)$ ist. Für beliebiges e ergibt sich nun die Behauptung sofort durch vollständige Induktion, indem man sukzessive die Elemente $x^{p^{e-1}}, x^{p^{e-2}}, \ldots, x$ zu k adjungiert.

Für eine beliebige algebraische Erweiterung $k(x)$ von k ergibt sich die Behauptung aus dem 2. und 3. Fall.

Wir sind jetzt in der Lage, Satz 1 zu beweisen. Wir wenden Hilfssatz 3 an auf den Quotientenkörper $K = k(x_1, \ldots, x_n)$ von $A_\mathfrak{p}$ und den Restklassenkörper $\mathfrak{K} = k(\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)$ von $A_\mathfrak{p}$. Als p-Basis von k über k^p verwenden wir das System $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ aus Hilfssatz 2. Nach Hilfssatz 3 dürfen wir annehmen, daß fast alle α_i sowohl in einer p-Basis von K über K^p als auch in einer p-Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^p$ auftreten, etwa alle α_i mit $i \neq i_1, \ldots, i_t$. Setzt man $k_0' = k^p[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t}]$, so ist der p-Grad von k über k_0' gleich $s + t$. In der p-Basis von K über K^p treten daher außer den α_i mit $i \neq i_1, \ldots, i_t$ noch $s + t + r$ weitere Elemente auf, in der p-Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{K}^p$ noch $s + t + r'$ weitere Elemente $\left(r = \dim \frac{K}{k}, r' = \dim \frac{\mathfrak{K}}{k}\right)$.

Nach der Folgerung aus Hilfssatz 2 ist $M(A_\mathfrak{p}) = [E_\mathfrak{p} \oplus \bigoplus_{i = i_1, \ldots, i_t} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i] \oplus \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq i_1, \ldots, i_t}} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i$, woraus unmittelbar $E_\mathfrak{p} \oplus \bigoplus_{i = i_1, \ldots, i_t} A_\mathfrak{p}\, d\alpha_i \cong M(A_\mathfrak{p}/k_0')$ folgt. $M(A_\mathfrak{p})$ ist daher genau dann ein freier $A_\mathfrak{p}$-Modul, wenn $M(A_\mathfrak{p}/k_0')$ es ist. $M(A_\mathfrak{p}/k_0')$

ist genau dann frei, wenn sein Rang (= minimale Erzeugendenanzahl) mit dem Rang von $M(K/k_0')$ übereinstimmt. Nach dem Rangsatz aus [4], S. 171, gilt

$$\text{Rang } M\left(\frac{A_\mathfrak{p}}{k_0'}\right) = \text{Rang } M\left(\frac{\mathfrak{K}}{k_0'}\right) + \text{Rang } (\mathfrak{p}/\mathfrak{q}+\mathfrak{p}^2) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{q} = (\mathfrak{p} \cap k_0'[A_\mathfrak{p}^p])\, A_\mathfrak{p}.$$

$M(A_\mathfrak{p})$ ist somit genau dann frei, wenn

$$\text{(1)} \qquad \text{Rang } (\mathfrak{p}/\mathfrak{q}+\mathfrak{p}^2) = \text{Rang } M\left(\frac{K}{k_0'}\right) - \text{Rang } M\left(\frac{\mathfrak{K}}{k_0'}\right)$$

gilt.

Es sei nun π ein Element von $\mathfrak{p} \cap k_0'[A_\mathfrak{p}^p]$. Dann ist wegen $k_0'[A_\mathfrak{p}^p] = A_\mathfrak{p}^p[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t}]$ sicher $\pi = f(\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t})$, wo f ein Polynom mit Koeffizienten aus $A_\mathfrak{p}^p$ ist, das in allen Variablen höchstens vom Grad $p-1$ ist. Modulo $\mathfrak{p}$ erhält man $0 = \dot{f}(\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t})$, wo $\dot{f}$ aus f entsteht, indem man sämtliche Koeffizienten durch ihre Restklassen mod $\mathfrak{p}$ ersetzt. $A_\mathfrak{p}^p$ geht modulo $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}^p$ über, $\dot{f}$ hat daher Koeffizienten aus $\mathfrak{K}^p$. Nun sind die $\alpha_i (i \neq i_1, \ldots, i_t)$ aber nach Voraussetzung über $\mathfrak{K}^p$ p-unabhängig, mithin ist $\dot{f} \equiv 0$. Alle Koeffizienten von f liegen daher in $\mathfrak{p} \cap A_\mathfrak{p}^p \subseteq \mathfrak{p}^p$. Folglich ist $\pi \in \mathfrak{p}^p$ und daher $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}^p$. $\mathfrak{q}$ kann also in Formel (1) weggelassen werden.

Wegen $k_0'(K^p) = K^p[k_0'] = K^p[\{\alpha_i\}_{i \neq i_1, \ldots, i_t}]$ ergibt sich nach dem weiter oben Gesagten $\text{Rang } M\left(\frac{K}{k_0'}\right) = p\text{-Grad } \frac{K}{k_0'(K^p)} = s+t+r$. Die entsprechende Gleichung gilt auch mit $\mathfrak{K}$ anstelle von K und r' anstelle von r. Trägt man in (1) ein, so erhält man die gleichwertige Beziehung

$$\text{(2)} \qquad \text{Rang } \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 = r - r' = \dim \frac{K}{k} - \dim \frac{\mathfrak{K}}{k}.$$

Diese ist aber mit der Regularität von $A_\mathfrak{p}$ gleichbedeutend. Damit ist Satz 1 bewiesen.

§ 2. Differentialkonstantenkörper

Der Modul $M(A_\mathfrak{p})$ ist genau dann endlich erzeugt, wenn $[k:k^p]$ endlich ist. Bei unendlich erzeugtem $M(A_\mathfrak{p})$ wird es für das Folgende notwendig sein, dadurch zu einem endlichen Modul überzugehen, daß man einen uninteressanten direkten Summanden von $M(A_\mathfrak{p})$ abspaltet. Wir definieren daher:

DEFINITION. Ein Körper k_0 mit $k^p \subseteq k_0 \subseteq k$ heißt *Differentialkonstantenkörper für* $A_\mathfrak{p}$, wenn

1. $\langle A_\mathfrak{p}\, d k_0 \rangle$ ein direkter Summand von $M(A_\mathfrak{p})$ ist und $\langle A_\mathfrak{p}\, d k_0 \rangle \cong A_\mathfrak{p} \otimes_k M(k_0/k^p)$,

2. $M(A_\mathfrak{p}/k_0) = M(A_\mathfrak{p})/\langle A_\mathfrak{p}\, d k_0 \rangle$ endlich ist.

k_0 heißt *Differentialkonstantenkörper für die affine k-Algebra A*, wenn k_0 Differentialkonstantenkörper für jeden lokalen Ring $A_\mathfrak{p}$ von A ist.

Hilfssatz 2 und seine Folgerung zeigen, daß es für jede affine k-Algebra A einen Differentialkonstantenkörper gibt. Da nach 1. $\langle A_\mathfrak{p}\, d k_0 \rangle$ frei ist und direkter Summand von $M(A_\mathfrak{p})$ ergibt sich aus Satz 1 nun sofort

Satz 2. *Ist k_0 ein Differentialkonstantenkörper für $A_\mathfrak{p}$, so ist $A_\mathfrak{p}$ dann und nur dann regulär, wenn $M(A_\mathfrak{p}/k_0)$ frei ist.*

Wir zeigen noch zwei Hilfssätze über Differentialkonstantenkörper:

Hilfssatz 4. *Ist k_0 ein Differentialkonstantenkörper eines Stellenringes $A_\mathfrak{p}$, so ist $[k:k_0]$ endlich.*

Beweis. Für den Quotientenkörper $K=k(x_1, \ldots, x_n)$ von $A_\mathfrak{p}$ ergibt sich nach 2., daß $M(K/k_0)$ endlich ist, daher ist K über $k_0(K^p)$ endlich erzeugt. Wegen $K^p=k^p(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ ist $k_0(K^p)=k_0(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ und daher ist K über k_0 endlich erzeugt, folglich erst recht k über k_0.

Hilfssatz 5. *Gegeben seien endlich viele nullteilerfreie affine k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ und ein Körper $\hat{k}$ mit $k^p \subseteq \hat{k} \subseteq k$ und $[k:\hat{k}]<\infty$. Dann gibt es stets einen gemeinsamen Differentialkonstantenkörper k_0 für $A_1, \ldots, A_s$ mit $k_0 \subseteq \hat{k}$.*

Beweis. Es sei $\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine p-Basis von $\hat{k}$ über k^p und es sei $k=\hat{k}[\beta_1, \ldots, \beta_t]$. k' sei ein gemeinsamer Definitionskörper für $A_1, \ldots, A_s$, der außerdem noch $\beta_1, \ldots, \beta_t$ enthalte. Dann ist $k'[\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}]=k$. Aus dem System $\{\varkappa_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ kann eine p-Basis $\{\varkappa_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ von k über k' ausgewählt werden. Der Körper $k_0=k^p[\{\varkappa_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}]$ hat dann nach Hilfssatz 2 alle gewünschten Eigenschaften.

§ 3. Differentialformen auf abstrakten Varietäten

Es sei $K=k(x_1, \ldots, x_n)$ ein algebraischer Funktionenkörper der Dimension r über k und V ein *vollständiges abstraktes Modell* von K/k, d.h. 1. V besteht aus allen lokalen Ringen von Primidealen von endlich vielen affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ mit $Q(A_i)=K (i=1, \ldots, s)$; 2. Ist R ein beliebiger Bewertungsring von K/k mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}$, so gibt es genau einen lokalen Ring $\mathfrak{o}$ aus V, der von R dominiert wird, d.h. für genau ein $\mathfrak{o} \in V$ gilt $\mathfrak{o} \subseteq R$ und $\mathfrak{m}=\mathfrak{p} \cap \mathfrak{o}$, wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von $\mathfrak{o}$ bedeutet. Der Ring $\mathfrak{o}$ heißt dann das Zentrum von R auf V.

Definition. Es sei R ein Bewertungsring von K/k und $\mathfrak{p}$ sein maximales Ideal. $\mathfrak{p}$ heißt *Primdivisor 1. Art auf V*, wenn das Zentrum von R auf V die Restklassendimension $r-1$ hat*). Unter der *Divisorengruppe von V* verstehen wir die freie multiplikative Gruppe, die von den Primdivisoren 1. Art auf V erzeugt wird.

Das Zentrum $\mathfrak{o}$ von R auf V ist der lokale Ring eines minimalen Primideals eines Ringes A_i. Es sei A_i' die ganze Abschließung von A_i in K. Dann folgt: R ist der lokale Ring eines minimalen Primideals von A_i', also ein diskreter Bewertungsring.

Definition. Ein Unterkörper k_0 von k heißt ein *Differentialkonstantenkörper für V*, wenn k_0 Differentialkonstantenkörper für alle lokalen Ringe von V und für alle Bewertungsringe von Primdivisoren 1. Art auf V ist.

Aus Hilfssatz 5 folgt sofort, daß V immer einen Differentialkonstantenkörper besitzt, weil alle in der Definition genannten Ringe aus endlich vielen

*) d.h. der Restklassenkörper des Zentrums soll über k den Transzendenzgrad $r-1$ haben.

affinen k-Algebren hervorgehen. Die Differentialmoduln $M(R/k_0)$ und $M(\mathfrak{o}/k_0)$ der Bewertungsringe R von Primdivisoren 1. Art auf V und der regulären lokalen Ringe $\mathfrak{o} \in V$ sind dann endliche freie Moduln. Der Differentialmodul $M(K/k_0)$ des Körpers K entsteht aus diesen Moduln, indem man sie tensoriell über R bzw. $\mathfrak{o}$ mit K multipliziert. Bezeichnet d die Differentiation von K über k_0, so kann also $M(R/k_0)$ mit dem Modul $\langle R\,dR\rangle \subseteqq M(K/k_0)$ identifiziert werden, entsprechend $M(\mathfrak{o}/k_0)$ mit $\langle \mathfrak{o}\, d\, \mathfrak{o}\rangle$. Anders ausgedrückt: Die Differentiation von R über k_0 bzw. von $\mathfrak{o}$ über k_0 ist die Einschränkung der Differentiation von K über k_0 auf R bzw. $\mathfrak{o}$.

Es sei $du_1, \ldots, du_t$ eine Basis von $M(K/k_0)$ über K. $A(K/k_0)$ bezeichne die äußere Algebra von $M(K/k_0)$. Ihre Elemente ω lassen sich eindeutig in der Form

$$\omega = \varkappa_0 + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varkappa_{i_1 \ldots i_s}\, du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_s} \qquad (\varkappa_0, \varkappa_{i_1 \ldots i_s} \in K) \tag{1}$$

schreiben. Wir nennen ω eine *Differentialform von K über k_0*. Ist ω in $du_1, \ldots, du_t$ homogen vom Grad q, dann heißt ω eine Differentialform q-ter Stufe. Die Elemente von K sind die Differentialformen 0-ter Stufe, die Elemente des Differentialmoduls $M(K/k_0)$ die Differentialformen 1. Stufe. Unter den *Differentialformen höchster Stufe* verstehen wir die t-ter Stufe, die alle von der Form $\varkappa \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_t$ $(\varkappa \in K)$ sind. Für $q > t$ ist jede Differentialform q-ter Stufe gleich 0.

Wir wollen die Differentialformen auf V untersuchen. Zu diesem Zweck ordnen wir jeder Differentialform ω zunächst für jeden Primdivisor 1. Art auf V einen Wert zu.

DEFINITION. Es sei R der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V. Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_t$ aus R heißen ein *System uniformisierender Parameter von R über k_0*, wenn $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_0)$ bilden.

Ein solches System uniformisierender Parameter gibt es offenbar immer. $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ bilden dann auch eine Basis von $M(K/k_0)$ über K, weshalb jedes Element $\omega \in A(K/k_0)$ auch eine Darstellung (1) mit π anstelle von u besitzt.

DEFINITION. $\omega \in A(K/k_0)$ sei mit Hilfe der uniformisierenden Parameter $\pi_1, \ldots, \pi_t$ für R über k_0 in der Form (1) dargestellt. v sei die zu R gehörige Bewertung. Dann ist

$$v(\omega) = \operatorname*{Min}_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \{v(\varkappa_0), v(\varkappa_{i_1 \ldots i_s})\}.$$

Es ist zu zeigen, daß diese Definition unabhängig ist von der Wahl der uniformisierenden Parameter von R über k_0. Es sei $\pi_1', \ldots, \pi_t'$ ein weiteres solches System. Dann gilt

$$\{d\pi_1', \ldots, d\pi_t'\} = \{d\pi_1, \ldots, d\pi_t\} \cdot P$$

mit einer t-reihigen unimodularen Matrix P mit Koeffizienten aus R. Es sei

$$\omega = \varkappa_0' + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varkappa_{i_1 \ldots i_s}'\, d\pi_{i_1}' \wedge \cdots \wedge d\pi_{i_s}' \qquad (\varkappa_0', \varkappa_{i_1 \ldots i_s}' \in K).$$

Man sieht sofort, daß sich $\varkappa_0$ und die $\varkappa_{i_1 \dots i_s}$ linear durch $\varkappa'_0$ und die $\varkappa'_{i_1 \dots i_s}$ mit Koeffizienten aus R ausdrücken lassen. Mithin ist

$$\operatorname*{Min}_{\substack{i_1 < \dots < i_s \\ 1 \leq s \leq t}} \{v(\varkappa_0), v(\varkappa_{i_1 \dots i_s})\} \geqq \operatorname*{Min}_{\substack{i_1 < \dots < i_s \\ 1 \leq s \leq t}} \{v(\varkappa'_0), v(\varkappa'_{i_1 \dots i_s})\}.$$

Aus Symmetriegründen gilt auch die umgekehrte Ungleichung. Damit ist bewiesen, daß die Definition sinnvoll ist.

Satz 3. *v durchlaufe alle Bewertungen, die zu Primdivisoren 1. Art auf V gehören. $\omega \neq 0$ sei eine Differentialform von K über k_0. Dann gilt $v(\omega) = 0$ für fast alle v.*

Beweis. Wir betrachten zunächst alle Primdivisoren 1. Art auf V, deren Bewertungsringe lokale Ringe eines minimalen Primideals aus einem festen A'_i sind. A'_i ist ein endlicher Erweiterungsring von k_0: $A'_i = k_0[y_1, \dots, y_m]$. Für die genannten Bewertungsringe R gilt daher: $M(R/k_0)$ wird von $dy_1, \dots, dy_m$ erzeugt. Nun kann man aus einem Erzeugendensystem von $M(R/k_0)$ immer eine Basis von $M(R/k_0)$ auswählen, also aus $y_1, \dots, y_m$ ein System uniformisierender Parameter von R über k_0. Dazu gibt es nur endlich viele Möglichkeiten. Um die Werte von ω für die Primdivisoren 1. Art auf V zu bestimmen, genügt es also, endlich viele Darstellungen (1) von ω zu betrachten. Für Elemente $\varkappa$ aus K ist bekannt, daß $v(\varkappa) = 0$ ist für fast alle v. Daraus folgt nun die Behauptung von Satz 3.

Wegen Satz 3 kann jeder Differentialform $\omega \in A(K/k_0)$ ein Divisor (ω) zugeordnet werden: Durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primdivisoren 1. Art auf V, $v_\mathfrak{p}$ die zugehörigen Bewertungen von K über k, so ist $(\omega) = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(\omega)}$.

Definition. Eine Differentialform ω von K über k_0 heißt von *1. Gattung auf V*, wenn (ω) ein ganzer Divisor ist, d.h. $v(\omega) \geqq 0$ für alle v.

Gleichbedeutend damit ist: Für jeden Bewertungsring R eines Primdivisors 1. Art auf V ist ω ein Element der äußeren Algebra $A(R/k_0)$ von $M(R/k_0)$.

Ist R ein beliebiger Unterring von K, so bezeichnen wir mit $A^*(R/k_0)$ den R-Untermodul aus $A(K/k_0)$, der von 1 und allen Differentialformen $dr_{i_1} \wedge \dots \wedge dr_{i_s}$ mit $r_{i_1}, \dots, r_{i_s} \in R$ $(i_1 < \dots < i_s,\ 1 \leqq s \leqq t)$ erzeugt wird. Ist R Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V oder ein regulärer lokaler Ring von V, so ist $A^*(R/k_0) = A(R/k_0)$.

Definition. Ist ω eine Differentialform von K über k_0 und R ein Bewertungsring von K über k oder $R = \mathfrak{o} \in V$, so heißt *ω regulär für R*, wenn $\omega \in A^*(R/k_0)$ ist. ω heißt *reguläre Differentialform von K/k_0*, wenn ω regulär ist für jeden Bewertungsring R von K/k. ω heißt *regulär auf V*, wenn ω für jedes $\mathfrak{o} \in V$ regulär ist.

Ist ω regulär auf V, so ist ω auch eine reguläre Differentialform von K/k_0, weil es zu jedem Bewertungsring R von K/k ein $\mathfrak{o} \in V$ mit $\mathfrak{o} \subseteqq R$ gibt. Eine reguläre Differentialform von K/k_0 ist auch von 1. Gattung auf V. Daher ist „regulär auf V" der stärkste, „von 1. Gattung auf V" der schwächste unter den drei Begriffen.

DEFINITION. Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_t \in \mathfrak{o} \in V$ heißen ein *System uniformisierender Parameter für* $\mathfrak{o}$ bezüglich k_0, wenn $\langle \mathfrak{o}\, d\mathfrak{o} \rangle$ ein freier $\mathfrak{o}$-Modul mit der Basis $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ ist.

SATZ 4. *Ist* $\mathfrak{o}$ *ein regulärer Ring von* V, *dann besitzt er ein System uniformisierender Parameter bezüglich* k_0.

Denn in diesem Fall ist $\langle \mathfrak{o}\, d\mathfrak{o} \rangle = M(\mathfrak{o}/k_0)$ ein freier Modul, der dann auch eine aus Differentialen bestehende Basis besitzt.

SATZ 5. *V sei singularitätenfrei (d.h. jedes $\mathfrak{o} \in V$ sei regulär). Dann ist jede Differentialform 1. Gattung auf V auch regulär auf V.*

BEWEIS. Da jedes $\mathfrak{o} \in V$ regulär ist, ist es insbesondere ganz abgeschlossen. Die Bewertungsringe R von Primdivisoren 1. Art auf V, die $\mathfrak{o}$ umfassen, entsprechen daher umkehrbar eindeutig den minimalen Primidealen von $\mathfrak{o}$ und sind die Quotientenringe von $\mathfrak{o}$ nach diesen Idealen. Ferner gilt $\mathfrak{o} = \bigcap_{\mathfrak{o} \subseteq R} R$. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter für $\mathfrak{o}$ bezüglich k_0. Dann ist es auch ein System uniformisierender Parameter für jedes R mit $\mathfrak{o} \subseteq R$, da R ein Quotientenring von $\mathfrak{o}$ ist. Es sei

$$\omega = \varrho_0 + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_s \\ 1 \leqq s \leqq t}} \varrho_{i_1 \ldots i_s}\, d\pi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\pi_{i_s} \quad (\varrho_0, \varrho_{i_1 \ldots i_s} \in K)$$

von 1. Gattung auf V. Dann ist $\varrho_0, \varrho_{i_1 \ldots i_s} \in R$ für alle R, mithin auch $\varrho_0, \varrho_{i_1 \ldots i_s} \in \mathfrak{o} = \bigcap_{\mathfrak{o} \subseteq R} R$, womit ω als regulär auf V erkannt ist.

FOLGERUNGEN. 1. *Besitzt der Funktionenkörper K/k ein singularitätenfreies vollständiges Modell und ist k_0 ein Differentialkonstantenkörper von V, so sind die Begriffe „reguläre Differentialform auf V über k_0", „reguläre Differentialform von K/k_0", und „Differentialform 1. Gattung auf V" äquivalent.*

2. *Ist V ein singularitätenfreies, V' ein beliebiges vollständiges Modell von K/k und k_0 ein gemeinsamer Differentialkonstantenkörper von V und V', so ist eine Differentialform von K/k_0, die von 1. Gattung auf V ist, auch von 1. Gattung auf V'.*

Es sei V ein beliebiges vollständiges Modell von K/k und k_0 ein Differentialkonstantenkörper von V. Wir betrachten die Differentialformen höchster Stufe von K/k_0. Da sie einen zyklischen K-Modul bilden, bestehen ihre Divisoren auf V aus allen Divisoren einer Divisorenklasse. Wir zeigen

SATZ 6. *Die Klasse der Divisoren auf V der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0 hängt nicht vom Differentialkonstantenkörper k_0 ab.*

BEWEIS. Es seien k_0 und k_1 zwei Differentialkonstantenkörper für V. Nach Hilfssatz 4 ist $[k : k_0]$ und $[k : k_1]$ endlich. $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sei eine p-Basis von k über k_0, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ eine p-Basis von k über k_1. V sei die Menge aller lokalen Ringe der Primideale der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_m$, deren ganze Abschließungen mit $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$ bezeichnet seien. Dann gibt es einen gemeinsamen Definitionskörper k' von $A_1, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_m$, der überdies $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_s$ enthält. Es folgt $k' k_0 = k' k_1 = k$. Aus jeder p-Basis von k_0 bzw. k über k^p läßt sich daher eine p-Basis $\{\varkappa^{(0)}\}$ bzw. $\{\varkappa^{(1)}\}$ von k über k' auswählen.

Nach Hilfssatz 2 sind dann die Körper $k_0' = k^p\left[\{x^{(0)}\}\right]$ und $k_1' = k^p\left[\{x^{(1)}\}\right]$ selbst Differentialkonstantenkörper von V und es ist $k_0' \subseteq k_0$ und $k_1' \subseteq k_1$. Es genügt daher, den Beweis für die folgenden beiden Fälle zu führen:

a) k_0 ist in k_1 enthalten,

b) k_0 und k_1 sind zwei Differentialkonstantenkörper der Art, wie sie in Hilfssatz 2 auftreten, die zum gleichen Definitionskörper k' gehören.

a) Es sei $\eta_1, \ldots, \eta_s$ eine p-Basis von k_1 über k_0 und R der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V. d sei die Differentiation von K, d_0 die von K über k_0, d_1 die von K über k_1. Aus der Definition des Differentialkonstantenkörpers und Satz 1 folgt dann

$$M(R) = \langle R\,dR\rangle = E \oplus \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} R\,d\eta_i \oplus \langle R\,dk_0\rangle,$$

wo E ein endlicher, freier R-Modul ist, der isomorph zu $M(R/k_1)$ ist, während $M(R/k_0) \cong E \oplus \overset{s}{\underset{i=1}{\oplus}} R\,d\eta_i$ ist. Bildet $d_1\pi_1, \ldots, d_1\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_1)$, dann ist $d_0\pi_1, \ldots, d_0\pi_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s$ eine Basis von $M(R/k_0)$. Ist $d_1x_1, \ldots, d_1x_t$ eine Basis von $M(K/k_1)$, so ist $d_0x_1, \ldots, d_0x_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s$ eine Basis von $M(K/k_0)$. Die Determinante der Übergangsmatrix von der Basis $\{d_0x_1, \ldots, d_0x_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s\}$ zur Basis $\{d_0\pi_1, \ldots, d_0\pi_t, d_0\eta_1, \ldots, d_0\eta_s\}$ von $M(K/k_0)$ stimmt mit der Determinante der Übergangsmatrix von $\{d_1x_1, \ldots, d_1x_t\}$ zu $\{d_1\pi_1, \ldots, d_1\pi_t\}$ überein. Hieraus ergibt sich, daß die Divisoren der Differentialformen $d_0x_1 \wedge \cdots \wedge d_0x_t \wedge d_0\eta_1 \wedge \cdots \wedge d_0\eta_s$ und $d_1x_1 \wedge \cdots \wedge d_1x_t$ übereinstimmen.

b) Hier ergibt sich aus Hilfssatz 2 sowie Satz 1

$$M(R) = \langle R\,dR\rangle = E_R \oplus \langle R\,dk_0\rangle = E_R \oplus \langle R\,dk_1\rangle$$

mit einem endlichen, freien R-Modul E_R, der nach Hilfssatz 2 eine aus Differentialen bestehende Basis besitzt. Wir zeigen zunächst: Die Moduln E_R aller Bewertungsringe R der Primdivisoren 1. Art auf V erzeugen in $M(K)$ alle denselben K-Modul $K \cdot E_R = E$. Dies ist auf Grund von Hilfssatz 2 klar für zwei Bewertungsringe, die Quotientenringe derselben affinen k-Algebra sind. Es seien nun R und R' zwei beliebige Bewertungsringe von Primdivisoren 1. Art auf V und $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$ ihre Zentren auf V. Dann liegt $\mathfrak{p}$ in einem affinen Modell V_a von V und $\mathfrak{p}'$ in einem affinen Modell V_a' von V. Der Durchschnitt $V_a \cap V_a'$ ist nicht leer (weil $K \in V_a, V_a'$) und daher selbst ein abstraktes Modell von K/k (vgl. [2], II, Satz 1). Es gibt daher einen Primdivisor 1. Art auf V, dessen Zentrum auf $V_a \cap V_a'$ liegt. Sein Bewertungsring sei R''. Dann sind R und R'' sowie R' und R'' jeweils Quotientenringe einer affinen k-Algebra. Es folgt $K \cdot E_R = K \cdot E_{R''}$ und $K \cdot E_{R'} = K \cdot E_{R''}$, also $K \cdot E_R = K \cdot E_{R'}$ q.e.d.

d_0 sei die Differentiation von K über k_0, d_1 die von K über k_1. Ist $dx_1, \ldots, dx_t$ eine Basis von E, dann ist $d_ix_1, \ldots, d_ix_t$ eine Basis von $M(K/k_i)$ $(i = 0, 1)$. Ist $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ eine Basis von E_R, so ist $d\pi_t, \ldots, d_i\pi_t$ eine Basis von $M(R/k_i)$ $(i = 0, 1)$. Aus $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t = \varkappa \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$ folgt $d_ix_1 \wedge \cdots \wedge d_ix_t = \varkappa \cdot d_i\pi_1 \wedge \cdots \wedge d_i\pi_t$ $(i = 0, 1)$. Daher stimmen die Divisoren von $d_0x_1 \wedge \cdots \wedge d_0x_t$ und $d_1x_1 \wedge \cdots \wedge d_1x_t$ überein.

DEFINITION. Die nach Satz 6 von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers k_0 von V unabhängige Klasse der Divisoren der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0 heißt *die kanonische Klasse von* V.

Es sei $\bar{k}$ die algebraische Abschließung von k in K. Die Differentialformen höchster Stufe von K über k_0, die von 1. Gattung auf V sind, bilden einen $\bar{k}$-Modul, der isomorph ist zum $\bar{k}$-Modul aller Vielfachen eines Divisors aus der kanonischen Klasse. Von letzterem ist bekannt, daß seine Dimension über $\bar{k}$ endlich ist.

DEFINITION. Die Dimension des $\bar{k}$-Moduls der Differentialformen höchster Stufe von K über k_0, die von 1. Gattung auf V sind, heißt das *geometrische Geschlecht von* V. Es wird mit $p_g(V)$ bezeichnet.

Nach Satz 6 hängt $p_g(V)$ nicht vom Differentialkonstantenkörper k_0 von V ab. Ist V ein singularitätenfreies, V' ein beliebiges vollständiges Modell von K/k so folgt $p_g(V) \leqq p_g(V')$ nach Satz 5, Folgerung 2. Zwei singularitätenfreie vollständige Modelle von K/k haben also immer das gleiche geometrische Geschlecht.

DEFINITION. Unter dem *geometrischen Geschlecht* $p_g(K/k)$ *von* K *über* k werde das Minimum aller $p_g(V)$ verstanden, wo V alle vollständigen abstrakten Modelle von K/k durchläuft.

Existiert ein singularitätenfreies vollständiges Modell V von K/k, so ist $p_g(K/k) = p_g(V)$. Es wird sich später zeigen, daß das hier eingeführte geometrische Geschlecht $p_g(K/k)$ für einen Funktionenkörper K einer Variablen über k mit dem im Riemann-Rochschen Satz auftretenden Geschlecht von K übereinstimmt.

§ 4. Verallgemeinerungen der Riemannschen Formel

Ist K ein separabel erzeugbarer algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und x ein separierendes transzendentes Element von K/k, dann gilt für den Divisor des exakten Differentials dx bekanntlich $(dx) = \mathfrak{d}\left(\frac{K}{k(x)}\right) \cdot \mathfrak{n}_x^{-2}$, wo $\mathfrak{d}$ die (Dedekindsche) Differente bedeutet und $\mathfrak{n}_x$ den Nennerdivisor von x (vgl. [3], S. 110). Im folgenden Satz wird eine Verallgemeinerung dieser nach RIEMANN benannten Formel gegeben.

SATZ 7. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper über k und V ein vollständiges abstraktes Modell von K/k. k_0 sei ein Differentialkonstantenkörper von V und $dx_1, \ldots, dx_t$ eine Basis von $M(K/k_0)$. $\mathfrak{p}$ durchlaufe alle Primdivisoren 1. Art auf V, $R_\mathfrak{p}$ die zugehörigen Bewertungsringe. Für jedes $\mathfrak{p}$ sei $\varepsilon_{i\mathfrak{p}} = \pm 1$ so bestimmt, daß $x_i^{\varepsilon_{i\mathfrak{p}}} \in R_\mathfrak{p}$ ist $(i = 1, \ldots, t)$. Ferner sei $\mathfrak{n}_{x_i}$ der Nennerdivisor von x_i $(i = 1, \ldots, t)$ und $\mathfrak{d}_j$ bezeichne die j-te Kählersche Differente. Dann gilt für den Divisor der Differentialform $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_s,\ 1 \leqq s \leqq t)$ die Formel*

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}) = \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_{t-s}\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0\left[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}\right]}\right)}{\mathfrak{n}_{x_{i_1}}^2 \cdot \cdots \cdot \mathfrak{n}_{x_{i_s}}^2}.$$

Beweis. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter von $R_\mathfrak{p}$ bezüglich k_0. Wegen $dx_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, dx_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}} \in dR_\mathfrak{p}$ gilt dann

$$\{dx_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, dx_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}\} = \{d\pi_1, \ldots, d\pi_t\} \cdot P$$

mit einer t-reihigen quadratischen Matrix P mit Koeffizienten aus $R_\mathfrak{p}$. Drückt man nun $dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ durch die $d\pi_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\pi_{j_s}$ aus, so erhält man als Koeffizienten bis aufs Vorzeichen gerade alle s-reihigen Unterdeterminanten, die sich aus den i_1-ten, …, i_s-ten Spalten der Matrix P bilden lassen. Es ist dann $v_\mathfrak{p}(dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}})$ gleich dem Minimum der Werte dieser Unterdeterminanten.

Andererseits gilt $M\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]}\right) \cong M\binom{R_\mathfrak{p}}{k_0} / \langle dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}} \rangle$ und $M\binom{R_\mathfrak{p}}{k_0}$ ist ein freier $R_\mathfrak{p}$-Modul mit der Basis $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$. Die Kählerschen Differenten von $R_\mathfrak{p}$ über $k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]$ berechnen sich daher nach ihrer Definition aus den Unterdeterminanten der Koeffizientenmatrix, mit der man $dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ durch $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ ausdrückt. Die s-reihigen Unterdeterminanten liefern die Differente $\mathfrak{d}_{t-s}$. Damit ist gezeigt, daß die $\mathfrak{p}$-Komponente des Divisors von $dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{d}_{t-s}\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}}, \ldots, x_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}]}\right)$ übereinstimmt.

Wegen $dx^{-1} = -x^{-2}dx$ folgt nun sofort

$$dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s} = \pm x_{i_1}^{1-\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}^{1-\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}} \cdot dx_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}\mathfrak{p}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_s}^{\varepsilon_{i_s}\mathfrak{p}}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung von Satz 7.

Bemerkung. Satz 7 gilt natürlich auch für Char. $k = 0$ mit $k_0 = k$.

Man kann auch den Differentialformen von K über dem arithmetischen Konstantenkörper k in analoger Weise wie den Differentialformen von K über einem Differentialkonstantenkörper k_0 für jeden Primdivisor 1. Art auf V einen Wert zuordnen. Ist $dx_1, \ldots, dx_t$ eine Basis von $M(K/k)$, so wird $-v_\mathfrak{p}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t)$ definiert als das Minimum aller ν mit $\mathfrak{p}^\nu \cdot (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t) \subseteq R_\mathfrak{p} dR_\mathfrak{p} \wedge \cdots \wedge dR_\mathfrak{p}$. Für den hierdurch gegebenen Divisor der Differentialform $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t$ bewies F. K. Schmidt die Formel (unveröffentlicht)

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t) = \frac{\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right)}{\prod_\mathfrak{p} \mathfrak{d}_t\binom{R_\mathfrak{p}}{k} \cdot \mathfrak{n}_{x_1}^2 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{n}_{x_t}^2},$$

wobei die Bezeichnungen sinngemäß wie in Satz 7 zu wählen sind. Die durch diese Differentialformen gegebene „kanonische Klasse" erweist sich jedoch im Fall algebraischer Funktionenkörper einer Variablen als nicht identisch mit der kanonischen Klasse des Riemann-Rochschen Satzes.

F. K. Schmidt weist mich noch darauf hin, daß die Differente $\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right)$ eine Schachtelung der folgenden Form gestattet:

$$\mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right) = \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_\mathfrak{p}}{P_\mathfrak{p}}\right) \cdot \mathfrak{d}_0\left(\frac{P_\mathfrak{p}}{k_0[x_1^{\varepsilon_1\mathfrak{p}}, \ldots, x_t^{\varepsilon_t\mathfrak{p}}]}\right).$$

Hierbei ist $P_\mathfrak{p}$ der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Bewertungsring von $k_0(x_1, \ldots, x_t)$. Der Beweis für diese Tatsache ergibt sich aus der Fortsetzungstheorie der Derivationen. Die Formel liefert eine genauere Einteilung der Primdivisoren, die in $(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t)$ aufgehen, als es nach Satz 7 möglich ist.

§ 5. Änderung der kanonischen Klasse bei endlich algebraischer Erweiterung des Funktionenkörpers

Es sei K/k ein algebraischer Funktionenkörper, V ein vollständiges Modell von K/k. L sei ein endlicher algebraischer Oberkörper von K und V' das abgeleitete normale Modell von V in L, d.h. ist V die Menge aller lokalen Ringe von Primidealen der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$, so ist V' die Menge aller lokalen Ringe von Primidealen der ganzen Abschließungen $A_1', \ldots, A_s'$ der A_i in L (vgl. [1]). Das Ziel dieses Paragraphen ist die Herleitung eines Zusammenhangs der kanonischen Klassen von V und V'.

Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor 1. Art auf V, so erhält man durch die Fortsetzungen seiner Bewertung auf L Primdivisoren $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_k$ 1. Art auf V'. Auf diese Weise bekommt man auch alle Primdivisoren 1. Art auf V'. Sind $e_1, \ldots, e_k$ die Verzweigungsexponenten der $\mathfrak{P}_i$ über $\mathfrak{p}$, so wird $\mathfrak{p}$ auf V' der Erweiterungsdivisor $\mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot \mathfrak{P}_k^{e_k}$ zugeordnet. Es ist klar, was unter dem Erweiterungsdivisor $\mathfrak{A}$ auf V' eines beliebigen Divisors $\mathfrak{a}$ von V zu verstehen ist.

Wir führen die Untersuchung in zwei Schritten durch, indem wir zuerst separabel algebraische Erweiterungen studieren, dann rein inseparable Erweiterungen.

a) Separable algebraische Erweiterungen

Es sei k_0 ein gemeinsamer Differentialkonstantenkörper von V und V'. Ferner sei $M(K/k_0) = K\,dx_1 \oplus \cdots \oplus K\,dx_t$. Ist L separabel algebraisch über K, dann ist $M(L/k_0) = L\,dx_1 \oplus \cdots \oplus L\,dx_t$, wobei die Differentiation $d: L \to M(L/k_0)$ Fortsetzung der Differentiation $d: K \to M(K/k_0)$ ist. Um die Änderung der kanonischen Klasse zu überblicken, genügt es daher, den Divisor von $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t$ auf V mit dem von $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t$ auf V' zu vergleichen. Es sei $S_\mathfrak{P}$ der Bewertungsring eines Primdivisors $\mathfrak{P}$ 1. Art auf V' und $R_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{P} \cap K$. $\pi_1, \ldots, \pi_t$ sei ein System uniformisierender Parameter von $S_\mathfrak{P}$ über k_0, $\varrho_1, \ldots, \varrho_t$ ein System uniformisierender Parameter von $R_\mathfrak{p}$ über k_0 und es gelte $d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t = s \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$. Dann ist s die Determinante der Matrix mit Koeffizienten aus $S_\mathfrak{P}$, mit der man $d\varrho_1, \ldots, d\varrho_t$ durch $d\pi_1, \ldots, d\pi_t$ darstellt. Wegen $M(S_\mathfrak{P}/R_\mathfrak{p}) \cong M(S_\mathfrak{P}/k_0)/\langle S_\mathfrak{P} d R_\mathfrak{p} \rangle = M(S_\mathfrak{P}/k_0)/\langle d\varrho_1, \ldots, d\varrho_t \rangle$ erzeugt s auch die 0-te Kählersche Differente $\mathfrak{d}_0(S_\mathfrak{P}/R_\mathfrak{p})$. Für die $\mathfrak{P}$-Komponenten der Divisoren von $d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t$ und $d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$ auf V' ergibt sich

$$(d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t)_\mathfrak{P} = \mathfrak{d}_0\left(\frac{S_\mathfrak{P}}{R_\mathfrak{p}}\right)(d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t)_\mathfrak{P}.$$

Aus

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t = \varkappa \cdot d\varrho_1 \wedge \cdots \wedge d\varrho_t = \varkappa \cdot s \cdot d\pi_1 \wedge \cdots \wedge d\pi_t$$

folgt

$$v_\mathfrak{P}(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t) = v_\mathfrak{P}(\varkappa) + v_\mathfrak{P}\left(\mathfrak{d}_0\left(\frac{S_\mathfrak{P}}{R_\mathfrak{p}}\right)\right).$$

Hieraus folgt nun sofort

Satz 8. *L sei separabel algebraisch über K. Ist $\mathfrak{k}$ ein Divisor aus der kanonischen Klasse von V, $\mathfrak{K}$ sein Erweiterungsdivisor auf V', so ist $\mathfrak{K} \cdot \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}_0(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V'. Dabei ist das Produkt über alle Primdivisoren 1. Art auf V' zu erstrecken.*

Wir schreiben $\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}_0(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{d}_0(V'/V)$ und nennen $\mathfrak{d}_0(V'/V)$ die 0-te Kählersche Differente von V' über V.

b) Differentialformen und Tatesche Spur

Bevor wir zu inseparablen Körpererweiterungen übergehen, leiten wir einen Zusammenhang zwischen den Differentialformen und der sog. Tateschen Spur her.

Wegen $M(K/k_0) = K\,dx_1 \oplus \cdots \oplus K\,dx_t$ bilden $x_1, \ldots, x_t$ eine p-Basis von K über $K' = k_0(K^p)$. Wir setzen $K_0 = K'$, $K_1 = K'[x_1], \ldots, K_t = K'[x_1, \ldots, x_t] = K$. R sei der Bewertungsring eines Primdivisors $\mathfrak{p}$ 1. Art auf V, R_i sei der Bewertungsring von $\mathfrak{p}$ in K_i $(i = 0, \ldots, t)$. Wegen $[K_i : K_{i-1}] = p$ ist K_i über K_{i-1} bei $v_{\mathfrak{p}}$ entweder unverzweigt oder reinverzweigt. In jedem Fall folgt, daß R_i über R_{i-1} von einem Element y_i erzeugt wird: $R_i = R_{i-1}[y_i]$ $(i = 1, \ldots, t)$. Da $R = R_0[y_1, \ldots, y_t]$ ist, bilden $y_1, \ldots, y_t$ ein System uniformisierender Parameter von R über k_0.

Es sei $x_i = \varrho_{0i} + \varrho_{1i} y_i + \cdots + \varrho_{p-1,i} y_i^{p-1}$ mit $\varrho_{ji} \in K_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, t)$. Dann gilt

$$dx_i = (\varrho_{1i} + 2\varrho_{2i} y_i + \cdots + (p-1)\varrho_{p-1,i} y_i^{p-2})\,dy_i + \\ + d\varrho_{0i} + y_i d\varrho_{1i} + \cdots + y_i^{p-1} d\varrho_{p-1,i}.$$

Wir setzen

$$\varrho_{1i} + 2\varrho_{2i} y_i + \cdots + (p-1)\varrho_{p-1,i} y_i^{p-2} = D_{y_i} x_i.$$

Da $dy_1, \ldots, dy_{i-1}$ eine Basis von $K_{i-1}\,dK_{i-1}$ bilden, ergibt sich

$$dx_i = (D_{y_i} x_i) \cdot dy_i + \varkappa_{1i}\,dy_1 + \cdots + \varkappa_{i-1,i}\,dy_{i-1} \quad \text{mit} \quad \varkappa_{ji} \in K \quad (i = 1, \ldots, t).$$

Es folgt

$$(1) \qquad dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t = \prod_{i=1}^{t} (D_{y_i} x_i) \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_t.$$

Die Elemente $1, x_i, \ldots, x_i^{p-1}$ bilden eine Basis von K_i über K_{i-1}. Unter der *Tateschen Spur* σ_{x_i} von K_i über K_{i-1} versteht man die lineare Abbildung $\sigma_{x_i} : K_i \to K_{i-1}$, die jedem Element $\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 x_i + \cdots + \varkappa_{p-1} x_i^{p-1} \in K_i$ $(\varkappa_0, \ldots, \varkappa_{p-1} \in K_{i-1})$ das Element $\sigma_{x_i}(\varkappa) = \varkappa_{p-1} \in K_{i-1}$ zuordnet. Wir bestimmen die σ_{x_i}-Differente von R_i über R_{i-1}. Dazu haben wir zunächst den Komplementärmodul E_i von R_i zu bestimmen. Da $1, y_i, \ldots, y_i^{p-1}$ eine Basis von R_i über R_{i-1} bilden, findet man eine Basis $z_0, \ldots, z_{p-1}$ von E_i über R_{i-1} durch Auflösung des Gleichungssystems

$$\sigma_{x_i}(z_j \cdot y_i^k) = \delta_{jk}.$$

Wenden wir die Transformationsformel von TATE an (vgl. [6], Satz 1), so erhalten wir

$$\sigma_{x_i}(z_j \cdot y_i^k) = \sigma_{y_i}\left(z_j \cdot y_i^k \cdot (D_{y_i} x_i)^{1-p}\right).$$

Aus der Definition der Tateschen Spur ergibt sich nun sofort, daß

$$z_j = (D_{y_i} x_i)^{p-1} y_i^{p-j-1} \qquad (j = 0, 1, \ldots, p-1)$$

eine Lösung des Gleichungssystems ist. Daher ist $E_i = (D_{y_i} x_i)^{p-1} \cdot R_i$. Für die σ_{x_i}-Differente $\mathfrak{d}_i$ von R_i über R_{i-1} folgt hieraus

$$\mathfrak{d}_i = (D_{y_i} x_i)^{1-p} \cdot R_i. \tag{2}$$

Es sei nun $\sigma: K \to K'$ die lineare Funktion, die durch

$$\sigma(\varkappa) = \sigma_{x_1} \circ \sigma_{x_2} \circ \cdots \circ \sigma_{x_t}(\varkappa) \quad \text{für alle } \varkappa \in K$$

definiert wird. Für die mit Hilfe dieser Linearform gebildete Differente $\mathfrak{d}$ von R über R_0 gilt der Schachtelungssatz (vgl. [5], Satz 1)

$$\mathfrak{d} = \prod_{i=1}^{t} \mathfrak{d}_i.$$

Aus (2) folgt

$$\mathfrak{d} = \prod_{i=1}^{t} (D_{y_i} x_i)^{1-p} \cdot R. \tag{3}$$

(3) und (1) ergeben zusammen

SATZ 9. *$\mathfrak{d}$ sei die mit Hilfe der Linearform $\sigma = \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_t}$ gebildete Differente von R über R_0. Dann ist $\mathfrak{d} = (d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)_{\mathfrak{p}}^{1-p}$, wo $(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)_{\mathfrak{p}}$ die $\mathfrak{p}$-Komponente des Divisors $(d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_t)$ bedeutet.*

c) Inseparable Erweiterungen vom Grad p

Es sei $L = K(x)$ mit $x^p \in K$, $x \notin K$. k' sei ein gemeinsamer Definitionskörper der affinen k-Algebren $A_1, \ldots, A_s$ und $A_1', \ldots, A_s'$, deren lokale Ringe gerade V und V' ausmachen. $\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}$ sei eine p-Basis von k über k'. Wir wählen als gemeinsamen Differentialkonstantenkörper von V und V' den Körper $k_0 = k^p[\{\varkappa_\mu\}_{\mu \in M}]$. Wegen $L^p \subseteq K$ gilt $K^p[\{\varkappa_\mu\}] = k_0(K^p) \subseteq L^p[\{\varkappa_\mu\}] = k_0(L^p) \subseteq K \subseteq L$. Wir zeigen zunächst, daß die $\varkappa_\mu$ über L^p p-unabhängig sind (dann natürlich auch über K^p). Es sei $A' = k[x_1, \ldots, x_n]$ einer der Ringe A_i'. Nach Hilfssatz 1 sind die $\varkappa_\mu$ ($\mu \in M$) über $k'[x_1, \ldots, x_n]$ p-unabhängig. Dann sind sie aber auch über $L' = k'(x_1, \ldots, x_n)$ p-unabhängig und wegen $L^p = k^p(x_1^p, \ldots, x_t^p) \subseteq L'$ auch über L^p. Es folgt

$$L^p[\{\varkappa_\mu\}] = K^p[\{\varkappa_\mu\}]\,[x^p] \quad \text{mit} \quad x^p \notin K^p[\{\varkappa_\mu\}].$$

HILFSSATZ 6. *Es sei S der Bewertungsring eines Primdivisors 1. Art auf V' und $R = S \cap K$. Dann ist $S \cap L^p[\{\varkappa_\mu\}] = S^p[\{\varkappa_\mu\}]$ und $R \cap K^p[\{\varkappa_\mu\}] = R^p[\varkappa_\mu\}]$.*

BEWEIS. Wir zeigen die erste Gleichung, die zweite ergibt sich genau so. S sei Quotientenring von $A' = k[x_1, \ldots, x_n]$ und $S' = S \cap L'$ mit $L' = k'(x_1, \ldots, x_n)$. Wir zeigen zuerst: $S = S'[\{\varkappa_\mu\}]$. Da S^p und k' in S' enthalten sind, gilt

$S^p[k, x_1, \ldots, x_n] = S^p[k', x_1, \ldots, x_n][\{x_\mu\}] \subseteq S'[\{x_\mu\}]$. $s \in k[x_1, \ldots, x_n]$ sei ein Element der Nennermenge von S. Dann ist $\frac{1}{s^p} \in S^p$. Wegen $s^{p-1} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ergibt sich $\frac{1}{s} \in S^p[k, x_1, \ldots, x_n]$. Es gilt daher $S \subseteq S'[\{x_\mu\}]$ und da die umgekehrte Inklusion trivial ist, folgt $S = S'[\{x_\mu\}]$. Die x_μ $(\mu \in M)$ sind über S' p-unabhängig, da sie über L' p-unabhängig sind.

Als nächstes zeigen wir, daß es Elemente $y_1, \ldots, y_t \in S'$ gibt, die über S^p p-unabhängig sind, so daß $S' = S^p[y_1, \ldots, y_t]$ gilt. Es ist nämlich L' eine endliche, rein inseparable Erweiterung des algebraischen Funktionenkörpers L^p, weshalb für S' und S^p wie in b) für R und R_0 geschlossen werden kann.

Es ergibt sich $S = S^p[\{x_\mu\}, y_1, \ldots, y_t]$, wobei die Elemente des Systems $\{x_\mu\}, y_1, \ldots, y_t$ p-unabhängig über S^p sind und daher auch eine p-Basis von L über L^p bilden. Es sei nun $s \in S \cap L^p[\{x_\mu\}]$. Dann besitzt s als Element von $L^p[\{x_\mu\}]$ eine Darstellung $s = f(\{x_\mu\})$, wobei f ein Polynom mit Koeffizienten aus L^p ist, das in allen Variablen vom Grad $\leq p-1$ ist. Als Element von S besitzt s eine Darstellung $s = g(y_1, \ldots, y_t, \{x_\mu\})$, wo g ein Polynom mit Koeffizienten aus S^p ist, das in allen Variablen vom Grad $\leq p-1$ ist. Durch Koeffizientenvergleich folgt hieraus sofort, daß alle Koeffizienten von f in S^p liegen. Also ist $S \cap L^p[\{x_\mu\}] \subseteq S^p[\{x_\mu\}]$. Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, folgt die im Hilfssatz behauptete Gleichheit.

Es sei $x_1, \ldots, x_{t-1}$ eine p-Basis von K über $k_0(L^p) = L^p[\{x_\mu\}]$. Dann ist $x, x_1, \ldots, x_{t-1}$ eine p-Basis von L über $k_0(L^p)$ und $x_1, \ldots, x_{t-1}, x^p$ eine p-Basis von K über $k_0(K^p)$. d' sei die Differentiation von L über k_0, d die von K über k_0. Wir vergleichen die Divisoren der Differentialformen $d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_{t-1} \wedge d x^p$ auf V und $d' x \wedge d' x_1 \wedge \cdots \wedge d' x_{t-1}$ auf V'.

Zu diesem Zweck betrachten wir die mit Hilfe der nichttrivialen Linearform $\sigma_{x^p} \circ \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}} \circ \sigma_x$ gebildete Differente von S über $S \cap K^p[\{x_\mu\}] = R^p[\{x_\mu\}]$, wobei die σ jeweils Tatesche Spuren sind. Den beiden Zerlegungen

$$\sigma_{x^p} \circ (\sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}} \circ \sigma_x) = (\sigma_{x^p} \circ \sigma_{x_1} \circ \cdots \circ \sigma_{x_{t-1}}) \circ \sigma_x$$

entsprechen nach dem Schachtelungssatz Zerlegungen der Differente von folgender Form

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S}{S^p[\{x_\mu\}]}\right) \cdot \mathfrak{d}\left(\frac{S^p[\{x_\mu\}]}{R^p[\{x_\mu\}]}\right) = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right) \cdot \mathfrak{d}\left(\frac{R}{R^p[\{x_\mu\}]}\right). \tag{4}$$

Es sei $\mathfrak{P}$ der Primdivisor von S, $\mathfrak{p}$ der von R. Dann gilt nach Satz 9:

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S}{S^p[\{x_\mu\}]}\right) = (d' x \wedge d' x_1 \wedge \cdots \wedge d' x_{t-1})_{\mathfrak{P}}^{1-p},$$

$$\mathfrak{d}\left(\frac{R}{R^p[\{x_\mu\}]}\right) = (d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_{t-1} \wedge d x^p)_{\mathfrak{p}}^{1-p}.$$

Wir beweisen jetzt, daß $\mathfrak{d}\left(\frac{S^p[\{x_\mu\}]}{R^p[\{x_\mu\}]}\right) \cdot S = \mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^p$ ist. Wie unter b) gezeigt, gilt $S = R[y] = R \oplus R \cdot y \oplus \cdots \oplus R \cdot y^{p-1}$ und $\mathfrak{d}(S/R) = (D_y x)^{1-p} \cdot S$. Es folgt $S^p[\{x_\mu\}] = R^p[\{x_\mu\}][y^p]$, wo $1, y^p, \ldots, (y^p)^{p-1}$ eine Basis von $S^p[\{x_\mu\}]$ über

$R^{\mathfrak{p}}[\{x_\mu\}]$ bilden. Folglich ist

$$\mathfrak{d}\left(\frac{S^{\mathfrak{p}}[\{x_\mu\}]}{R^{\mathfrak{p}}[\{x_\mu\}]}\right)\cdot S=(D_{y^{\mathfrak{p}}}x^{\mathfrak{p}})^{1-\mathfrak{p}}\cdot S=[(D_y x)^{1-\mathfrak{p}}]^{\mathfrak{p}}\cdot S=\mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^{\mathfrak{p}}.$$

Aus (4) folgt somit:

$$(d'x\wedge d'x_1\wedge\cdots\wedge d'x_{t-1})_{\mathfrak{P}}^{1-\mathfrak{p}}\,\mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{t-1}\wedge dx^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}}^{1-\mathfrak{p}},$$

wo unter $(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{t-1}\wedge dx^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}}$ die $\mathfrak{P}$-Komponente des Erweiterungsdivisors von $(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{t-1}\wedge dx^{\mathfrak{p}})$ zu verstehen ist. Es folgt

$$(d'x\wedge d'x_1\wedge\cdots\wedge d'x_{t-1})_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{d}\left(\frac{S}{R}\right)\cdot(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{t-1}\wedge dx^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}}.$$

Daher unterscheiden sich der Divisor von $d'x\wedge d'x_1\wedge\cdots\wedge d'x_{t-1}$ auf V' und der Erweiterungsdivisor von $dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{t-1}\wedge dx^{\mathfrak{p}}$ auf V' nur um $\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$, wo $\mathfrak{P}$ alle Primdivisoren 1. Art auf V' durchläuft und $S_{\mathfrak{P}}$ und $R_{\mathfrak{p}}$ die zugehörigen Bewertungsringe in L und K bedeuten. Wir setzen $\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})=\mathfrak{d}(V'/V)$ und nennen diesen Divisor die σ_x-Differente von V' über V. Bildet man eine σ-Differente $\mathfrak{d}(V'/V)$ bezüglich einer beliebigen nichttrivialen Linearform σ von L über K, so unterscheidet sie sich von der mit Hilfe der Tateschen Spur σ_x gebildeten Differente nur um den Divisor eines Elements aus L (vgl. [5], S. 421). Ist daher $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Divisor der kanonischen Klasse von V, $\mathfrak{K}$ sein Erweiterungsdivisor auf V' und $\mathfrak{d}(V'/V)$ die bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente von V' über V, so ist $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{d}(V'/V)$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V'.

d) Beliebige endlich algebraische Erweiterungen

Im Fall einer endlichen separablen algebraischen Erweiterung L von K ist bekannt, daß die 0-te Kählersche Differente $\mathfrak{d}_0(V'/V)$ mit der Dedekindschen Differente $\mathfrak{d}(V'/V)$ übereinstimmt. Diese ist die mit Hilfe der gewöhnlichen Spur σ gebildete σ-Differente. In Satz 8 darf daher $\mathfrak{d}_0$ durch eine beliebige σ-Differente $\mathfrak{d}$ ersetzt werden. Zusammen mit c) und dem Schachtelungssatz der σ-Differenten folgt dann sofort

SATZ 10. *L sei eine beliebige endliche algebraische Erweiterung von K, $\mathfrak{k}$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V, $\mathfrak{K}$ sein Erweiterungsdivisor auf V' und $\mathfrak{d}(V'/V)$ die bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente von V' über V. Dann ist $\mathfrak{K}\cdot\mathfrak{d}(V'/V)$ ein Divisor der kanonischen Klasse von V'.*

e) Anwendung auf einen Spezialfall

Es sei $K=k(x_1,\ldots,x_r)$ ein rationaler Funktionenkörper und L eine endliche algebraische Erweiterung von K. V sei das projektive Modell von $k(x_1,\ldots,x_r)$, welches aus allen lokalen Ringen der Primideale der affinen k-Algebren $k[x_1,\ldots,x_r]$, $k[x_1^{-1},x_1^{-1}x_2,\ldots,x_1^{-1}x_r],\ldots,k[x_r^{-1},x_r^{-1}x_1,\ldots,x_r^{-1}x_{r-1}]$ besteht, V' sei das abgeleitete normale Modell von V in L.

Die affinen k-Algebren von V sind ganz abgeschlossen, daher sind die Bewertungsringe der Primdivisoren 1. Art auf V die lokalen Ringe dieser k-Algebren nach ihren minimalen Primidealen. Wir zeigen

Hilfssatz 7. *Außer den lokalen Ringen der minimalen Primideale von $k[x_1, \ldots, x_r]$ gibt es nur noch einen Bewertungsring, der zu einem Primdivisor 1. Art auf V gehört, nämlich den lokalen Ring des Primideals (x_1^{-1}) in $k[x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_r]$. Ist $\mathfrak{n}_{x_i}$ der Nennerdivisor von x_i auf V $(i=1, \ldots, r)$, dann ist $\mathfrak{n}_{x_1} = \cdots = \mathfrak{n}_{x_r}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor 1. Art auf V mit $k[x_i^{-1}, x_i^{-1}x_1, \ldots, x_i^{-1}x_r] < R_\mathfrak{p}$, dem Bewertungsring von $\mathfrak{p}$. Ist dann $\nu_\mathfrak{p}(x_i^{-1}) = 0$, so folgt sofort $\nu_\mathfrak{p}(x_1), \ldots, \nu_\mathfrak{p}(x_r) \geqq 0$, also $k[x_1, \ldots, x_r] < R_\mathfrak{p}$. Ist $\nu_\mathfrak{p}(x_i^{-1}) > 0$, so kann, weil x_i^{-1} ein Primelement von $k[x_i^{-1}, x_i^{-1}x_1, \ldots, x_i^{-1}x_r]$ ist, nur $\nu_\mathfrak{p}(x_i^{-1}) = 1$ gelten. Dann muß aber $\nu_\mathfrak{p}(x_i^{-1}x_j) = 0$ sein $(j=1, \ldots, r)$, weil der Restklassenkörper von $R_\mathfrak{p}$ den Transzendenzgrad $r-1$ hat. Es folgt somit $\nu_\mathfrak{p}(x_i^{-1}) = 1$ für $j=1, \ldots, r$. $R_\mathfrak{p}$ ist daher der lokale Ring von (x_1^{-1}) in $k[x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_r]$.

Außerdem haben wir gesehen, daß stets gleichzeitig $\nu_\mathfrak{p}(x_i) \geqq 0$ ist $(i=1, \ldots, r)$ oder $\nu_\mathfrak{p}(x_i) = -1$ $(i=1, \ldots, r)$, was $\mathfrak{n}_{x_1} = \cdots = \mathfrak{n}_{x_r}$ beweist.

Wir bezeichnen den gemeinsamen Nennerdivisor von $x_1, \ldots, x_r$ mit $\mathfrak{n}_x$. Er ist, wie aus dem Beweis von Hilfssatz 7 hervorgeht, ein Primdivisor 1. Art auf V. $k_0 = k$ ist ein Differentialkonstantenkörper von V. Wir bestimmen den Divisor von $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r$ auf V. Es ergibt sich

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r) = \frac{1}{\mathfrak{n}_x^{r+1}}.$$

Für alle Primdivisoren $\mathfrak{p}$, die von $\mathfrak{n}_x$ verschieden sind, ist $x_1, \ldots, x_r$ ein System uniformisierender Parameter, daher $(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r)_\mathfrak{p} = 1$. Für $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}_x$ ist $x_1^{-1}, x_1^{-1}x_2, \ldots, x_1^{-1}x_r$ ein System uniformisierender Parameter. Wegen

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r = -x_1^{r+1} \cdot dx_1^{-1} \wedge d(x_1^{-1}x_2) \wedge \cdots \wedge d(x_1^{-1}x_r)$$

folgt nun sofort die Behauptung. Zusammen mit Satz 10 ergibt sich

Satz 11. *Der Erweiterungsdivisor von $\mathfrak{n}_x$ auf V' sei ebenfalls mit $\mathfrak{n}_x$ bezeichnet. Dann besteht die kanonische Klasse von V' aus allen Divisoren*

$$\frac{\mathfrak{d}\left(\frac{V'}{V}\right)}{\mathfrak{n}_x^{r+1}},$$

wo $\mathfrak{d}$ eine bezüglich einer nichttrivialen Linearform σ von L über K gebildete σ-Differente von V' über V ist.

§ 6. Anwendungen auf algebraische Funktionenkörper einer Variablen

Es sei L ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und $K = k(x)$, wo x ein transzendentes Element von L über k ist. Wir wenden Satz 11 auf die singularitätenfreien vollständigen Modelle V von K und V' von L an, d.h. auf die aus allen Bewertungsringen von K über k bzw. von L über k bestehenden Modelle. Da die Voraussetzungen von Satz 11 erfüllt sind, folgt, daß die kanonische Klasse von V' aus allen Divisoren $\mathfrak{d}(V'/V) \cdot \mathfrak{n}_x^{-2}$

besteht, wo $\mathfrak{d}$ eine bezüglich einer nichttrivialen Linearform von L über K gebildete Differente ist. Da in $\mathfrak{d}(V'/V) = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}(S_{\mathfrak{P}}/R_{\mathfrak{p}})$ alle Bewertungsringe $S_{\mathfrak{P}}$ von L über k auftreten, stimmt diese Klasse bekanntlich mit der kanonischen Klasse von L überein, die im Riemann-Rochschen Satz auftritt.

Satz 12. *Ist K ein algebraischer Funktionenkörper einer Variablen über k und V das singularitätenfreie vollständige Modell von K/k, so stimmt die kanonische Klasse von V mit der kanonischen Klasse von K/k, die im Riemann-Rochschen Satz auftritt, überein. Das Geschlecht von K ist das geometrische Geschlecht von V.*

Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß man bei Verwendung von Differentialformen von K/k statt von K über einem Differentialkonstantenkörper k_0 nicht zur kanonischen Klasse von K/k zu gelangen braucht, wenn man die in § 4 angegebene „natürliche" Divisordefinition verwendet. Man kann dies schon für separabel erzeugbare Funktionenkörper K einer Variablen über k zeigen, vorausgesetzt, daß k unvollkommen ist. Es sei x ein separierendes transzendentes Element von K/k. Dann ist $M(K/k) = K\,dx$. Nach der Formel von F. K. Schmidt aus § 4 ergibt sich für den Divisor von dx

$$(dx) = \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k[x^{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}]}\right)}{\mathfrak{n}_x^2 \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)}.$$

$\mathfrak{p}$ durchläuft alle Primdivisoren von K über k. Aus der Separabilität von K über $k(x)$ folgt, daß $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_0\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k[x^{\varepsilon_{\mathfrak{p}}}]}\right)$ gleich der Dedekindschen Differente $\mathfrak{d}_x$ von K über $k(x)$ ist, also $(dx) = \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{n}_x^2} \cdot \frac{1}{\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)}$. Da der Faktor $\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{d}_1\left(\frac{R_{\mathfrak{p}}}{k}\right)$ von 1 verschieden sein kann, sobald k unvollkommen ist (vgl. [4], Satz 3), folgt, daß (dx) kein Divisor der kanonischen Klasse von K zu sein braucht.

Literatur

[1] Cartan, H., u. C. Chevalley: Schémas normaux; Morphismes; Ensembles constructibles. Sem. Cartan-Chevalley **8** (1955/56).

[2] Chevalley, C.: Les schémas (I, II). Sem. Cartan-Chevalley **8** (1955/56).

[3] Chevalley, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable. New York 1951.

[4] Kunz, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. reine angew. Math. **204**, 165–182 (1960).

[5] Lamprecht, E.: Über s-Differenten und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Variablen. Arch. Math. **4**, 412–424 (1953).

[6] Tate, J.: Genus Change in inseparable Extensions of Function Fields. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 400–406 (1952).

[7] Zariski, O.: Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces. Vorlesungsausarbeitung, Harvard Univ. 1957/58.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 11. Oktober 1960)

Nastold, H.-J.
Math. Zeitschr. 76, 75—84 (1961)

Zum Dualitätssatz in inseparablen Funktionenkörpern der Dimension 1

Von
Hans-Joachim Nastold

Nachdem von E. Kunz in der vorausgehenden Arbeit [4] gezeigt wurde, daß für eine algebraische Mannigfaltigkeit V mit inseparablem Funktionenkörper die Differentiation über einem geeigneten Unterkörper des Konstantenkörpers das richtige Tangentialbündel und die richtigen Differentialformen auf V liefert und daß insbesondere im Fall der Dimension 1 die so gebildeten Differentialformen der höchsten Stufe die richtige kanonische Klasse ergeben, stellte sich die Aufgabe, mit diesen Differentialen den *Dualitätssatz* zu beweisen. Dies soll im folgenden für den Fall der Dimension 1, also für Kurven auch mit inseparablem Funktionenkörper durchgeführt werden. Wir verlassen hier also den Standpunkt von A. Weils Foundations, wo der Funktionenkörper einer Varietät stets separabel ist. Über die Beziehung des *Dualitätssatzes* zum *Riemann-Rochschen Satz* und seine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen sei hier auf [7], insbesondere chap. II, verwiesen. Der Inhalt des Dualitätssatzes besteht in der Präzisierung einer *Dualität zwischen dem Raum der Repartitionen* einerseits (vgl. dazu [1]) *und dem Raum der durch einen Differentiationsprozeß gewonnenen* und daher rechnerisch leichter zu handhabenden *Differentialformen höchster Stufe* andererseits.

Das die Dualität liefernde Skalarprodukt definieren wir mit Hilfe von *Residuen* der Formen höchster Stufe. Der Begriff des Residuums wird dabei folgendermaßen gewonnen: Durch eine *Spurbildung* wird die Form in einen rationalen Unterkörper heruntergedrückt. Lediglich für Formen dieses rationalen Funktionenkörpers ist nun noch ein Residuum zu erklären. Dies geschieht mit Hilfe der Partialbruchzerlegung. Der Beweis des *Residuensatzes* beschränkt sich nun auf den Nachweis dieses Satzes im rationalen Funktionenkörper und wird somit trivial. Die Untersuchung der *Divisoren* der auftretenden Formen erfordert die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Spuren, Differenten und Differentiation.

Die eben genannte *Spurbildung* $L \to K$, L/K endlich algebraisch, für Formen höchster Stufe definieren wir sogleich für Funktionenkörper beliebiger Dimension. Sie dürfte auch an sich von Interesse sein. Wir erhalten sie durch Zusammensetzung und für einen p-Schritt, $L^p < K$, $[L:K] = p$, mit Hilfe der von J. Tate in [8] angegebenen Elementspur. Während die letztere aber von der Auswahl einer p-Basis abhängt, erweist sich unsere Spur für Differentialformen als invariant.

Grundlegend für unsere Entwicklungen ist der Begriff des *Differentialkonstantenkörpers*, so wie er in [4] definiert wurde, sowie dessen Eigenschaften.

Wir schließen uns daher auch in den Bezeichnungen eng an [4] an. So bedeutet $M(K/k_0)$, $M(R/k_0)$ usw. stets den Differentialmodul von K, R usw. über $k_0 \cdot M^t(K/k_0) = \wedge^t M(K/k_0)$ dessen t-te äußere Potenz. Mit Ausnahme des letzten Abschnitts 7. beschränken wir uns auf den Fall von Funktionenkörpern der Charakteristik $p > 0$.

Auf einen entsprechenden Dualitätssatz für Kurven mit Singularitäten und für Formen der komplementären Stufen r und $t-r$ kommen wir bei anderer Gelegenheit zurück.

Herrn E. KUNZ danke ich für wertvolle Diskussionen und die Überlassung des Manuskriptes seiner noch unveröffentlichten Arbeit [4].

1. Spur für Differentialformen höchster Stufe

$K = k(x_1, \ldots, x_n)$ sei ein algebraischer Funktionenkörper der Dimension r über k, V ein *Modell* von K/k, L eine endlich algebraische Erweiterung von K. Wir betrachten eine Kette von Zwischenkörpern $K < K_0 < K_1 < \cdots < K_s = L$, K_0 separable Hülle von K in L, $K_i^p < K_{i-1}$, $[K_i : K_{i-1}] = p$ für $i \geqq 1$, und in K_i jeweils das von V abgeleitete normale Modell V_i, $V_s = W$. $k_0 < k$ sei ein gemeinsamer wie in [4], § 5, c gewählter Differentialkonstantenkörper für die Modelle V, V_i, W. Mit $[K_i : K_i^p(k_0)] = [K : K^p(k_0)] = p^t$ definieren wir eine *Spurabbildung für Differentialformen der höchsten Stufe t* $S_{L/K} : M^t(L/k_0) \to M^t(K/k_0)$ durch Hintereinanderausführung von Abbildungen $S_{K_i/K_{i-1}} : M^t(K_i/k_0) \to M^t(K_{i-1}/k_0)$ und $S_{K_0/K} : M^t(K_0/k_0) \to M^t(K/k_0)$. Es genügt also, Spuren zu definieren für die beiden Fälle a) $L^p < K$, $[L : K] = p$, und b) L/K separabel algebraisch.

a) Wie in [4], § 5, c) ist $K^p(k_0) < L^p(k_0) < K < L$. Wir wählen eine p-Basis $x_1, \ldots, x_{t-1}$ von K über $L^p(k_0)$ und eine p-Basis x von L über K. Dann ist x^p eine p-Basis von $L^p(k_0)$ über $K^p(k_0)$ und $x_1, \ldots, x_{t-1}, x$ bzw. $x^p, x_1, \ldots, x_{t-1}$ sind p-Basen von L über $L^p(k_0)$ bzw. K über $K^p(k_0)$, ihre Differentiale also Basen der Differentialmoduln $M(L/k_0)$ bzw. $M(K/k_0)$. Wir definieren nun die Spur der beliebigen Form $\lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx \in M^t(L/k_0)$, $\lambda \in L$, durch die Formel $S_{L/K}(\lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx) = \sigma_x(\lambda) \cdot dx^p \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \in M^t(K/k_0)$, wo $\sigma_x : L \to K$ die Tatesche Spur gebildet mit dem Element x bezeichnet [8]. Die so definierte Spur ist unabhängig von den gewählten p-Basen $x_1, \ldots, x_{t-1}$, und x. Ersetzt man zunächst x durch eine andere p-Basis y von L über K so wird $\lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx = \lambda D_y x \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy$, wenn $dx = (D_y x) \cdot dy + a_1 dx_1 + \cdots + a_{t-1} dx_{t-1}$, $a_i \in L$, und man hat nun $S_{L/K}(\lambda D_y x \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy) = \sigma_y(\lambda D_y x) \cdot dy^p \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} = \sigma_x\left(\lambda D_y x \cdot (D_y x)^{p-1}\right) \cdot dy^p \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} = \sigma_x(\lambda) \cdot D_{y^p} x^p \cdot dy^p \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} = \sigma_x(\lambda) \cdot dx^p \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1}$. Ersetzt man $x_1, \ldots, x_{t-1}$ durch eine andere p-Basis $y_1, \ldots, y_{t-1}$ von K über $L^p(k_0)$, so tritt zu λ ein Faktor aus K, der sich aus der Spur σ_x herausziehen läßt.

Ist $\mathfrak{q}$ ein Primdivisor 1. Art auf W, S der zugehörige Bewertungsring von L und $R = S \cap K$, so ist $S \cap L^p(k_0) = S^p[k_0]$ und $R \cap K^p(k_0) = R^p[k_0]$. Es gibt dann stets eine p-Basis y von L über K, so daß $S = R[y]$, und eine p-Basis $y_1, \ldots, y_{t-1}$ von K über $L^p(k_0)$, so daß $R = S^p[k_0, y_1, \ldots, y_{t-1}]$. y^p ist dann

eine p-Basis von $L^p(k_0)$ über $K^p(k_0)$ mit $S^p[k_0] = R^p[k_0, y^p]$ und $y_1, \ldots, y_{t-1}, y$ bzw. $y^p, y_1, \ldots, y_{t-1}$ sind p-Basen von L über $L^p(k_0)$ bzw. K über $K^p(k_0)$ mit $S = S^p[k_0, y_1, \ldots, y_{t-1}, y]$ bzw. $R = R^p[k_0, y^p, y_1, \ldots, y_{t-1}]$. Die Potenzprodukte der $y_1, \ldots, y_{t-1}, y$ bzw. $y^p, y_1, \ldots, y_{t-1}$ bilden Ganzheitsbasen der Bewertungsringe S bzw. R und ihre Differentiale Basen der Differentialmoduln $M(S/k_0)$ bzw. $M(R/k_0)$. Wir können dann mit diesen speziellen p-Basen die Spur der Form $\omega = \lambda' \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{t-1} \wedge dy$ so berechnen: $S_{L/K}(\omega) = \sigma_y(\lambda') \cdot dy^p \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{t-1}$. Nach Definition des Divisors einer Form ω, [4], § 3, ist $v_\mathfrak{q}(\omega) = v_\mathfrak{q}(\lambda')$, ebenso $v_\mathfrak{p}(S_{L/K}(\omega)) = v_\mathfrak{p}(\sigma_y(\lambda'))$, wenn $\mathfrak{p}$ den zu R gehörenden Primdivisor 1. Art auf V bezeichnet. Da die Elemente $1, y, \ldots, y^{p-1}$ eine Basis von S über R bilden, ist der Differentenexponent $m_{\mathfrak{q}, \sigma_y}$ für die Linearform σ_y gleich 0, denn für die mit der Tateschen Spur σ_y gebildeten Differente $\mathfrak{D}$ gilt nach [4], § 5, b) $\mathfrak{D} = (D_y y)^{1-p} \cdot S = (1)$. Vgl. dazu auch [5], 2. und [1], S. 69ff.

b) Ist L/K separabel algebraisch, so wählen wir eine p-Basis $x_1, \ldots, x$ von K über $K^p(k_0)$. Diese ist dann zugleich p-Basis von L über $L^p(k_0)$, und wir definieren unsere Spurabbildung folgendermaßen $S_{L/K}(\lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t) = \sigma_{L/K}(\lambda) \cdot d'x_1 \wedge \cdots \wedge d'x_t$, wo $\sigma_{L/K}$ die gewöhnliche Spur für separabel algebraische Erweiterungen, d die Differentiation $L \to M(L/k_0)$ und d' die Differentiation $K \to M(K/k_0)$ bedeuten. Wiederum hängt die so definierte Abbildung nicht von der gewählten p-Basis $x_1, \ldots, x_t$ ab. Für einen Primdivisor 1. Art $\mathfrak{q}$ auf W, den zugehörigen Bewertungsring S von L und $R = S \cap K$ kann man wieder eine p-Basis $y_1, \ldots, y_t$ von K über $K^p(k_0)$ mit $R = R^p[k_0, y_1, \ldots, y_t]$ finden, deren Differentiale eine Basis von $M(R/k_0)$ bilden, und $S_{L/K}$ in der Form $S_{L/K}(\lambda' \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_t) = \sigma_{L/K}(\lambda') \cdot d'y_1 \wedge \cdots \wedge d'y_t$ berechnen.

Insgesamt ist die so definierte Spur eine K-lineare Abbildung

$$S_{L/K}: M^t(L/k_0) \to M^t(K/k_0).$$

2. Lokale Spuren

Wir definieren durch eine leichte Modifikation neben unserer globalen Spur für jeden Primdivisor 1. Art $\mathfrak{q}$ auf W eine *lokale Spur* $S_{L/K,\mathfrak{q}}$, indem wir dieselbe Kette von Zwischenkörpern $K \subset K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_s = L$ wie in 1. zugrundelegen, die Abbildung $S_{L/K,\mathfrak{q}}$ wieder durch Hintereinanderausführung der Abbildung $S_{K_i/K_{i-1},\mathfrak{q}}$ erklären, $S_{K_i/K_{i-1},\mathfrak{q}}$ unverändert gleich $S_{K_i/K_{i-1}}$ setzen und lediglich die Definition der Spur für den separablen Anteil K_0/K abändern: Wir setzen für L/K separabel algebraisch sonst wie unter 1. b) $S_{L/K,\mathfrak{q}}(\lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t) = \sigma_{L/K,\mathfrak{q}}(\lambda) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t$, wo $\sigma_{L/K,\mathfrak{q}}$ die gewöhnliche lokale Spur, d.h. die Spur $\sigma_{L_\mathfrak{q}/K_\mathfrak{p}}: L_\mathfrak{q} \to K_\mathfrak{p}$ der Komplettierung $L_\mathfrak{q}$ von L nach dem Primdivisor $\mathfrak{q}$ in die Komplettierung $K_\mathfrak{p}$ von K nach dem Primdivisor $\mathfrak{p}$, über dem $\mathfrak{q}$ liegt ($\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$), bedeutet. λ ist dabei vermöge der kanonischen Einbettung $L \to L_\mathfrak{q}$ als Element von $L_\mathfrak{q}$ aufzufassen, und $\sigma_{L/K,\mathfrak{q}}(\lambda)$ ist aus $K_\mathfrak{p}$. Man erhält so eine Abbildung $S_{L/K,\mathfrak{q}}: M^t(L/k_0) \to K_\mathfrak{p} \underset{K}{\otimes} M^t(K/k_0)$. Wegen $\sum_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} \sigma_{L/K,\mathfrak{q}}(\lambda) = \sigma_{L/K}(\lambda)$ gilt $\sum_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega) = S_{L/K}(\omega) \in M^t(K/k_0)$. Diese Formel gilt für eine

beliebige endlich algebraische Erweiterung L/K: Es folgt aus der Formel für den separablen Anteil K_0/K $\sum_{\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}} S_{K_0/K,\mathfrak{q}}(\omega') = S_{K_0/K}(\omega')$ mit $\omega' = S_{L/K_0}(\omega) =$ $S_{L/K_0,\mathfrak{q}}(\omega)$ $\sum_{\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}} S_{K_0/K,\mathfrak{q}}\left(S_{L/K_0,\mathfrak{q}}(\omega)\right) = S_{K_0/K}\left(S_{L/K_0}(\omega)\right)$, also nach Definition der Spuren

$$\sum_{\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}} S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega) = S_{L/K}(\omega). \tag{1}$$

Die lokalen Spuren sind K-lineare Abbildungen

$$S_{L/K,\mathfrak{q}}: M^t(L/k_0) \to K_{\mathfrak{p}} \underset{K}{\otimes} M^t(K/k_0),\ \mathfrak{q}\to\mathfrak{p}.$$

3. Residuen

Von nun an beschränken wir uns auf einen Funktionenkörper L der Dimension 1 über k. Wir wählen in L einen rationalen Unterkörper $K = k(x)$ und eine Erzeugende x von K/k aus. Alle auftretenden Funktionenkörper der Dimension 1 seien mit dem eindeutig bestimmten vollständigen normalen, also singularitätenfreien Modell versehen. Letzteres besteht gerade aus allen Bewertungsringen mit diesem Quotientenkörper, die k enthalten. k_0 sei wieder ein wie in 1. gewählter gemeinsamer Differentialkonstantenkörper: $k_0 \subset k$. L/K ist dann endlich algebraisch, und wir haben in 1. und 2. Spurabbildungen $L\to K$ für Differentialformen höchster Stufe definiert. Zur Definition des *Residuums* $\mathrm{res}_{\mathfrak{q}}(\omega)$ einer solchen Form $\omega \in M^t(L/k_0)$ an der Stelle $\mathfrak{q}$ von L genügt es daher, das Residuum $\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ einer Form $\pi \in M^t(K/k_0)$ an einer Stelle $\mathfrak{p}$ von K zu definieren. Dies geschieht im Anschluß an [2] mit Hilfe der Partialbruchzerlegung im rationalen Funktionenkörper K: Wir wählen noch eine p-Basis $x_1, \ldots, x_{t-1}$ von k über $k^p(k_0)$. Dann ist $x_1, \ldots, x_{t-1}, x$ eine p-Basis von K über $K^p(k_0)$. Jede Form $\pi \in M^t(K/k_0)$ läßt sich in der Gestalt $\pi = \alpha \cdot d x_1 \wedge \cdots \wedge d x_{t-1} \wedge d x$, $\alpha \in K$, schreiben. Ihr ordnen wir die Form $\alpha \cdot d x \in M(K/k)$ zu und definieren für eine Stelle $\mathfrak{p}$ mit $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqq 0$, wenn die rationale Funktion $\alpha \in K$ in x die Partialbruchentwicklung

$$\alpha = \frac{c_{-s}x^{s-1} + \cdots + c_{-s}^{(s-1)}}{p(x)^s} + \frac{c_{-s+1}x^{s-1} + \cdots + c_{-s+1}^{(s-1)}}{p(x)^{s-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}x^{s-1} + \cdots + c_{-1}^{(s-1)}}{p(x)} + \beta,$$

$\beta \in K$, $v_{\mathfrak{p}}(\beta) \geqq 0$, $p(x)$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige normierte Primpolynom aus $k[x]$, Grad $p(x) = s$, besitzt,

$$\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\pi) = \mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\alpha \cdot d x) = c_{-1}. \tag{2}$$

Ist $v_{\mathfrak{p}}(x) < 0$, so ersetzen wir x durch $y = 1/x$ und definieren das Residuum genau so mit der Partialbruchzerlegung in y. Wie man mühelos nachrechnet, hängt $\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ nicht von der Auswahl von x ab. Wir unterdrücken diese Rechnung, da wir die Unabhängigkeit von x im folgenden nicht benötigen, denken uns also ein erzeugendes Element x von K/k ein für allemal fest gewählt. Andererseits hängt $\mathrm{res}_{\mathfrak{p}}(\pi)$ ab von der Auswahl der p-Basis $x_1, \ldots, x_{t-1}$

von k über $k^p(k_0)$. Bei Ersetzung durch eine andere p-Basis $y_1, \ldots, y_{t-1}$ von k über $k^p(k_0)$ multiplizieren sich alle $\mathrm{res}_\mathfrak{p}(\pi)$ mit ein und demselben Faktor aus dem Konstantenkörper k. Das Residuum hat die Eigenschaften: (i) $\mathrm{res}_\mathfrak{p}: M^t(K/k_0) \to k$ ist eine k-lineare Abbildung (ii) $\mathrm{res}_\mathfrak{p}(\pi) = 0$ für $\nu_\mathfrak{p}(\alpha) \geqq 0$.

Nunmehr können wir das Residuum für ein lokales Differential $\pi_\mathfrak{p} \in K_\mathfrak{p} \underset{K}{\otimes} M^t(K/k_0)$ definieren: Mit $\pi_\mathfrak{p} = \alpha_\mathfrak{p} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx$, $\alpha_\mathfrak{p} \in K_\mathfrak{p}$, approximieren wir $\alpha_\mathfrak{p}$ durch ein $\alpha \in K$, so daß $\nu_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p} - \alpha) \geqq 0$, und setzen für $\pi = \alpha \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx$ $\mathrm{res}_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p}) = \mathrm{res}_\mathfrak{p}(\pi)$. Zufolge (i) und (ii) ist $\mathrm{res}_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})$ von der Auswahl des approximierenden Elementes $\alpha \in K$ unabhängig.

Mit Hilfe der lokalen Spuren $S_{L\,K,\mathfrak{q}}: M^t(L/k_\mathfrak{f}) \to K_\mathfrak{p} \underset{K}{\otimes} M^t(K/k_0)$, $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$, und der Residuen lokaler Differentiale des rationalen Funktionenkörpers K $\mathrm{res}_\mathfrak{p}: K_\mathfrak{p} \underset{K}{\otimes} M^t(K/k_0) \to k$ definieren wir das Residuum $\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega)$ einer Form $\omega \in M^t(L/k_0)$ an der Stelle $\mathfrak{q}$ von L durch die Formel

$$\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) = \mathrm{res}_\mathfrak{p}\left(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)\right), \qquad \mathfrak{q} \to \mathfrak{p}. \tag{3}$$

Die Abbildung $\mathrm{res}_\mathfrak{q}: M^t(L/k_0) \to k$ ist k-linear. Aus (1) und (3) ergibt sich sofort $\sum\limits_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} \mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) = \sum\limits_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} \mathrm{res}_\mathfrak{p}\left(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)\right) = \mathrm{res}_\mathfrak{p}\left(\sum\limits_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)\right) = \mathrm{res}_\mathfrak{p}\left(S_{L/K}(\omega)\right)$, also

$$\sum_{\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}} \mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) = \mathrm{res}_\mathfrak{p}\left(S_{L/K}(\omega)\right). \tag{4}$$

Für das Folgende grundlegend sind

Hilfssatz 1. *Ist* $\nu_\mathfrak{q}(\omega) \geqq 0$, *so ist* $\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) = 0$,

und

Hilfssatz 2. *Es gibt ein* $\omega \in M^t(L/k_0)$ *mit* $\nu_\mathfrak{q}(\omega) = -1$ *und* $\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) \neq 0$.

Den Beweis dieser Hilfssätze stellen wir zurück bis zum Schluß. Wir beweisen zunächst den Residuensatz und definieren dann mit Hilfe der Residuen ein Skalarprodukt $\langle \omega, r \rangle$ zwischen Differentialen $\omega \in M^t(L/k_0)$ und Repartitionen $r \in R$, das uns den Dualitätssatz liefern wird. Nachträglich ergibt sich so, daß unsere Definition von $\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega)$ in folgendem Sinne eindeutig ist: Andere Wahl der in die Definition von $\mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega)$ eingehenden willkürlichen Bestimmungsstücke, etwa des rationalen Zwischenkörpers K usw. liefert eventuell andere Residuen, die sich jedoch, falls der Konstantenkörper k in L algebraisch abgeschlossen ist, nur um ein und denselben festen Faktor $\varkappa$ aus k unterscheiden: $\mathrm{res}_\mathfrak{q}^{(1)}(\omega) = \varkappa \cdot \mathrm{res}_\mathfrak{q}^{(2)}(\omega)$, $\varkappa \in k$, für alle ω und $\mathfrak{q}$.

4. Der Residuensatz

Satz 1. *Für jede Form* $\omega \in M^t(L/k_0)$ *ist*

$$\sum_{\mathfrak{q}} \mathrm{res}_\mathfrak{q}(\omega) = 0. \tag{5}$$

$\mathfrak{q}$ *durchläuft dabei alle Primdivisoren von* L *oder alle Punkte der zugehörigen Kurve.*

BEWEIS. Nach Hilfssatz 1 sind in der Summe (5) nur endlich viele Summanden von 0 verschieden. Ferner ist nach (3) und (4) $\sum_{\mathfrak{q}} \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega) = \sum_{\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega)$ $= \sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}\left(S_{L/K}(\omega)\right)$. Wegen $S_{L/K}(\omega) \in M^1(K/k_0)$ genügt es also, den Residuensatz für Formen des rationalen Funktionenkörpers zu beweisen. Dazu unterscheiden wir für eine feste Erzeugung $K = k(x)$ die Primdivisoren $\mathfrak{p}$ von K mit $v_{\mathfrak{p}}(x) \geqq 0$ von dem zur Gradbewertung bezüglich x gehörigen Primdivisor ∞. Für die Stelle ∞ hat man zur Bildung des Residuums x durch $y = 1/x$ zu ersetzen und dann in der Partialbruchzerlegung in y des Koeffizienten α' das Residuum zum Primpolynom $y \in k[y]$ aufzusuchen. Auf Grund der Linearität der Residuenbildung und der Partialbruchzerlegung in x der Funktionen $\alpha \in K$ genügt es, um $\sum_{\mathfrak{p}} \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega) = 0$ für ein beliebiges $\omega \in M^1(K/k_0)$ nachzuweisen, diese Beziehung für die ω der Gestalt $\omega_1 = x^n \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx$, $n \geqq 0$, und $\omega_2 = \frac{c_{-\alpha} x^{s-1} + \cdots + c_{-\alpha}^{(s-1)}}{p(x)^{\alpha}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx$, $\alpha \geqq 1$, zu beweisen. Nun ist $v_{\mathfrak{p}}(x^n) \geqq 0$, also $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega_1) = 0$ für alle $\mathfrak{p}$. Ferner ist $\omega_1 = \frac{-1}{y^{n+2}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy$, also auch $\operatorname{res}_{\infty}(\omega_1) = 0$. Ebenso ist für $\alpha \geqq 2$ $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega_2) = 0$ für alle $\mathfrak{p}$ und $\omega_2 = \frac{z(x)}{p(x)^{\alpha}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dx = \frac{-y^{\alpha s - r - 2} z'(y)}{p'(y)^{\alpha}} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy$, wo r $= \operatorname{Grad} z(x) \leqq s - 1$, $s = \operatorname{Grad} p(x)$, also $\alpha s - r - 2 \geqq (\alpha - 1)s - 1 \geqq 0$. $z'(y)$ und $p'(y)$ sind dabei die Polynome, die aus $z(x)$ und $p(x)$ entstehen, wenn man $x = 1/y$ setzt und die Nenner beseitigt. Da $p'(y)$ ein Primpolynom in $k[y]$ ist, ist $v_{\infty}(\omega_2) \geqq 0$, also $\operatorname{res}_{\infty}(\omega_2) = 0$. Schließlich ist für $\alpha = 1$ für den zu $p(x)$ gehörigen Primdivisor $\mathfrak{p}_0$ $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}_0}(\omega_2) = c_{-1}$ und $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(\omega_2) = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0$. Hier ist $\alpha s - r - 2 \geqq s - (s-1) - 2 = -1$ und nur im Falle $r = s - 1$ < 0. Für diesen Fall wird $\omega_2 = \frac{-z'(y)}{p'(y)\, y} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy = \left(\frac{z_1(y)}{p'(y)} + \frac{-c_{-1}}{y}\right) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{t-1} \wedge dy$, also $\operatorname{res}_{\infty}(\omega_2) = -c_{-1}$.

5. Der Dualitätssatz

Im Riemann-Rochschen Satz in der auf A. WEIL zurückgehenden Form (vgl. dazu [1], [6] und insbesondere [7], chap. II) sind die *Repartitionen* oder Bewertungsvektoren von Bedeutung. Eine Repartition r ist eine Familie $\{r_{\mathfrak{q}}\}_{\mathfrak{q} \in W}$ von Elementen $r_{\mathfrak{q}} \in L$ mit $v_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}) \geqq 0$ für fast alle $\mathfrak{q}$, wo W die zum Funktionenkörper L gehörige Kurve, $\mathfrak{q}$ die Primdivisoren oder Punkte von W bezeichnen. Die Repartitionen bilden eine Algebra über k. Für einen Divisor D von L bezeichne $R(D)$ den Unterraum von R bestehend aus den $r = \{r_{\mathfrak{q}}\}$ mit $v_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}) \geqq -v_{\mathfrak{q}}(D)$. Die Zuordnung $f \in L \to \{r_{\mathfrak{q}}\}$ mit $r_{\mathfrak{q}} = f$ für alle $\mathfrak{q} \in W$ liefert eine Injektion von L in R. Wir bezeichnen mit $I(D)$ den k-Vektorraum $R/(R(D) + L)$, mit $J(D)$ den Raum der k-linearen Formen auf $I(D)$: $J(D) = I(D)'$. Für $D' \geqq D$ ist $R(D') \supset R(D)$, also $J(D) \supset J(D')$. Der Raum $J = \bigcup_D J(D)$ ist ein L-Vektorraum der Dimension 1: Für $f \in L$ und $\alpha \in J$ soll $f\alpha$ die k-lineare Abbildung $r \to \langle \alpha, fr \rangle$ sein.

Um an die übliche Bezeichnung anzuschließen, schreiben wir hier für $M^1(L/k_0)$, den *Raum der Differentialformen höchster Stufe*, Ω^1. Ω^1 ist ein L-

Vektorraum der Dimension 1. Wir werden im folgenden einen L-Isomorphismus zwischen Ω^t und J stiften. $(\omega) = \sum_{\mathfrak{q} \in W} \nu_{\mathfrak{q}}(\omega) \cdot \mathfrak{q}$ sei der Divisor von $\omega \in \Omega^t$. Für einen Divisor D bezeichnen wir mit $\Omega^t(D)$ den k-Vektorraum bestehend aus 0 und den Formen $\omega \neq 0$ mit $(\omega) \geqq D$.

Nun definieren wir ein *Skalarprodukt* $\langle \omega, r \rangle$ zwischen Differentialformen $\omega \in \Omega^t$ und Repartitionen $r \in R$:

$$\langle \omega, r \rangle = \sum_{\mathfrak{q} \in W} \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}\, \omega). \tag{6}$$

Da $\nu_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}\, \omega) \geqq 0$ für fast alle $\mathfrak{q}$, hat die Summe (6) nach Hilfssatz 1 nur endlich viele von 0 verschiedene Summanden. $\langle \omega, r \rangle$ ist wegen der k-Linearität von $\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}$ ein Skalarprodukt zwischen den k-Vektorräumen Ω^t und R mit den Eigenschaften:

(i) $\langle \omega, r \rangle = 0$ für $r \in L$ nach dem Residuensatz.

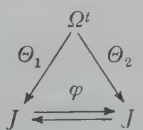
(ii) $\langle \omega, r \rangle = 0$ für $r \in R(D)$ und $\omega \in \Omega^t(D)$, denn dann ist $\nu_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}\, \omega) \geqq 0$ für alle $\mathfrak{q} \in W$, und die Behauptung folgt aus Hilfssatz 1.

(iii) Für $f \in L$ ist $\langle f\omega, r \rangle = \langle \omega, fr \rangle$.

Bezeichnen wir für $\omega \in \Omega^t$ mit $\Theta(\omega)$ die durch $r \to \langle \omega, r \rangle$ definierte Linearform auf R, so ergibt sich aus (i) und (ii): Die Zuordnung $\omega \to \Theta(\omega)$ bildet $\Omega^t(D)$ in $J(D)$, den dualen Raum von $R/(R(D)+L)$, ab. Sie ist nach (iii) L-linear.

Satz 2 (Dualitätssatz). *Für jeden Divisor D ist Θ ein k-Isomorphismus von $\Omega^t(D)$ auf $J(D)$. $\langle \omega, r \rangle$ stiftet also eine Dualität zwischen den Vektorräumen $\Omega^t(D)$ und $I(D) = R/(R(D)+L)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß aus $\Theta(\omega) \in J(D)$ $\omega \in \Omega^t(D)$ folgt. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein $\mathfrak{q} \in W$ mit $\nu_{\mathfrak{q}}(\omega) < \nu_{\mathfrak{q}}(D)$, also $\nu_{\mathfrak{q}}(\omega) + 1 \leqq \nu_{\mathfrak{q}}(D)$. Nach Hilfssatz 2 existiert ein $\omega' \in \Omega^t$ mit $\nu_{\mathfrak{q}}(\omega') = -1$ und $\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega') \neq 0$. Es ist $\omega' = \lambda \cdot \omega$ mit $\lambda \in L$, und $\nu_{\mathfrak{q}}(\lambda) = -\nu_{\mathfrak{q}}(\omega) - 1 \geqq -\nu_{\mathfrak{q}}(D)$. Für die Repartition r mit $r_{\mathfrak{p}} = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ und $r_{\mathfrak{q}} = \lambda$ gilt $r \in R(D)$, und es ist $\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}\, \omega) = \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega') \neq 0$, dagegen $\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(r_{\mathfrak{p}}\, \omega) = \operatorname{res}_{\mathfrak{p}}(0) = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, also $\langle \omega, r \rangle = \sum_{\mathfrak{q} \in W} \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(r_{\mathfrak{q}}\, \omega) \neq 0$. $\Theta(\omega)$ sollte aber nach Voraussetzung auf $R(D)$ verschwinden. — Daraus folgt: Θ ist monomorph. Denn aus $\Theta(\omega) = 0$ ergibt sich $\omega \in \Omega^t(D')$ für jeden Divisor D', also $\omega = 0$. Da $\Theta : \Omega^t \to J$ ein L-Monomorphismus und Ω^t, J beides L-Vektorräume der Dimension 1 sind, ist Θ ein L-Isomorphismus von Ω^t auf J. Zu $\alpha \in J(D)$ gibt es daher ein $\omega \in \Omega^t$ mit $\Theta(\omega) = \alpha$ und $\omega \in \Omega^t(D)$.



Korollar 1. *Ist k in L algebraisch abgeschlossen und sind Θ_1, Θ_2 zwei wie oben gewonnene L-Isomorphismen $\Omega^t \to J$, so ist $\Theta_1(\omega) = \varkappa \cdot \Theta_2(\omega)$ mit festem $\varkappa \in k$ für alle $\omega \in \Omega^t$. Für die zugehörigen Residuen gilt ebenfalls* $\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}^{(1)}(\omega) = \varkappa \cdot \operatorname{res}_{\mathfrak{q}}^{(2)}(\omega)$.

BEWEIS. Durch Θ_1, Θ_2 wird ein L-Isomorphismus φ: $J \to J$ induziert. Es ist also $\Theta_1(\omega) = f \cdot \Theta_2(\omega)$ mit festem $f \in L$. Aus Satz 2 ergibt sich aber $\nu_\mathfrak{q}(f) \geqq 0$ für alle $\mathfrak{q}$, also $f = \varkappa \in k$. Mit $\alpha = \Theta(\omega)$ gilt aber, wenn r die Repartition mit $r_\mathfrak{q} = 1$, $r_\mathfrak{p} = 0$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$ bezeichnet, für das zugehörige Residuum nach (6) $\operatorname{res}_\mathfrak{q}(\omega) = \langle \alpha, r \rangle$, also $\operatorname{res}_\mathfrak{q}^{(1)}(\omega) = \varkappa \cdot \operatorname{res}_\mathfrak{q}^{(2)}(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^t$.

Einer Linearform $\alpha \in J$ läßt sich ein Divisor zuordnen: $(\alpha) = \operatorname{Max}\{D \mid \alpha \in J(D)\}$.

KOROLLAR 2. *Es ist* $(\omega) = (\Theta(\omega))$.

Da nach dem Riemann-Rochschen Satz die Klasse der Divisoren (α), $\alpha \in J$, eindeutig bestimmt ist, gilt dasselbe von der Klasse der Divisoren (ω), $\omega \in \Omega^t = M^t(L/k_0)$. Während also Ω^t noch von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers k_0 abhängt, hat sich somit ergeben:

KOROLLAR 3. *Die Klasse der Divisoren* (ω), $\omega \in \Omega^t = M^t(L/k_0)$, *ist von der Wahl des Differentialkonstantenkörpers* k_0 *unabhängig.*

Dies läßt sich auch direkt und für Funktionenkörper beliebiger Dimension beweisen [4], § 3.

BEMERKUNG. Unser Dualitätssatz, der eine Dualität zwischen Formen der Stufen 0 und t (t höchste Stufe) herstellt, ist Spezialfall eines allgemeineren Dualitätssatzes, der eine entsprechende Beziehung zwischen Formen der komplementären Stufen r und $t-r$ herstellt. Wir werden an anderer Stelle darauf zurückkommen.

6. Nachweis der Hilfssätze 1 und 2

HILFSSATZ 1. Wir beweisen zunächst mit den Bezeichnungen von 1. für endlich algebraisches L/K und $\omega \in M^t(L/k_0)$: Aus $\nu_\mathfrak{q}(\omega) \geqq 0$ folgt $\nu_\mathfrak{p}(S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)) \geqq 0$ $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$. Nach Definition der Spur genügt es, dies für einen p-Schritt L/K (1. a)) und einen separabel algebraischen Schritt L/K (1. b)) jeweils einzeln zu zeigen. a) Mit den in 1. a) zu $\mathfrak{q}$ und S gewählten speziellen Basen $y_1, \ldots, y_{t-1}, y$ bzw. $y^p, y_1, \ldots, y_{t-1}$ ist für $\omega = \lambda' \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{t-1} \wedge dy$ wegen $\nu_\mathfrak{q}(\omega) = \nu_\mathfrak{q}(\lambda') \geqq 0$ in $S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega) = \sigma_y(\lambda') \cdot dy^p \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_{t-1}$ $\nu_\mathfrak{p}(\sigma_y(\lambda')) \geqq 0$, $\mathfrak{q} \to \mathfrak{p}$, (nach dem in 1. a) über den Differentenexponenten von σ_y Bemerkten) und folglich $\nu_\mathfrak{p}(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)) \geqq 0$. — b) Wir wählen zunächst zu S, dem zum Primdivisor $\mathfrak{q}$ von L gehörigen Bewertungsring, eine p-Basis $x_1, \ldots, x_t$ von L über $L^p(k_0)$ mit $S = S^p[k_0, x_1, \ldots, x_t]$, deren Differentiale eine Basis von $M(S/k_0)$ bilden, und wie in 1. b) eine ebensolche p-Basis $y_1, \ldots, y_t$ zu $R = S \cap K$. Nun ist in

$$\omega = \lambda \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_t \qquad \nu_\mathfrak{q}(\lambda) = \nu_\mathfrak{q}(\omega) \geqq 0$$

und

$$\omega = \lambda \cdot \frac{\partial(x_1 \ldots x_t)}{\partial(y_1 \ldots y_t)} \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_t = \lambda \cdot \frac{\partial(y_1 \ldots y_t)^{-1}}{\partial(x_1 \ldots x_t)} \cdot dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_t.$$

Da $M(S/R) = M(S/k_0)/\langle S\,dR \rangle$, ist $\frac{\partial(y_1 \ldots y_t)}{\partial(x_1 \ldots x_t)} \cdot S = \mathfrak{D}_0(S/R)$, der 0-ten Kählerschen Differente von S über R. Diese ist aber gleich der Dedekindschen Differente von S über R. Aus dem bekannten Zusammenhang zwischen lokaler Spur $S_{L/K,\mathfrak{q}}$ und Differentenexponent (vgl. dazu [5], 2. u. [1], S. 69ff.)

ergibt sich mit $S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)=\sigma_{L\,K,\mathfrak{q}}\left(\lambda\,\frac{\partial(y_1\dots y_t)^{-1}}{\partial(x_1\dots x_t)}\right)\cdot d'y_1\wedge\dots\wedge d'y_t$ aus

$$v_{\mathfrak{q}}\left(\lambda\,\frac{\partial(y_1\dots y_t)^{-1}}{\partial(x_1\dots x_t)}\right)\geqq -v_{\mathfrak{q}}\left(\mathfrak{D}_0\binom{S}{R}\right)$$

$$v_{\mathfrak{p}}\left(\sigma_{L/K,\mathfrak{q}}\left(\lambda\,\frac{\partial(y_1\dots y_t)^{-1}}{\partial(x_1\dots x_t)}\right)\right)\geqq 0,\quad\text{also}\quad v_{\mathfrak{p}}\left(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)\right)\geqq 0,\qquad \mathfrak{q}\to\mathfrak{p}.$$

Daraus ergibt sich nun Hilfssatz 1 mit den Bezeichnungen und Definitionen von 3. folgendermaßen: Für $\omega\in M^t(L/k_0)$ mit $v_{\mathfrak{q}}(\omega)\geqq 0$ ist wegen $v_{\mathfrak{p}}\left(S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)\right)\geqq 0$, $\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}$, in der Darstellung von $S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)$ durch die wie eben speziell zu $\mathfrak{p}$ in K gewählte p-Basis $y_1,\dots,y_t$ $S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)=\varkappa\cdot dy_1\wedge\dots\wedge dy_t$, $\varkappa\in K_{\mathfrak{p}}$ (den Strich bei d' lassen wir nun wieder weg) $v_{\mathfrak{p}}(\varkappa)\geqq 0$. Mit der in 3. benutzten p-Basis $x_1,\dots,x_{t-1}$, x von K über $K^p(k_0)$ wird dann für $v_{\mathfrak{p}}(x)\geqq 0$ $S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)=\varkappa\cdot dy_1\wedge\dots\wedge dy_t=\varkappa\,\frac{\partial(x_1\dots x_{t-1}\,x)^{-1}}{\partial(y_1\dots y_t)}\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_{t-1}\wedge dx$. Wie eben in b) ist aber

$$\frac{\partial(x_1\dots x_{t-1}\,x)}{\partial(y_1\dots y_t)}\cdot R=\mathfrak{D}_0\left(\frac{R}{k_0[x_1\dots x_{t-1}]\,[x]}\right)=\mathfrak{D}_0\left(\frac{R}{k[x]}\right),$$

der 0-ten Kählerschen Differente von R über $k[x]$. Letztere ist aber gleich (1), da der Bewertungsring R von K ein Quotientenring von $k[x]$ ist. Somit ist auch in $S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)=\alpha\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_{t-1}\wedge dx$ $v_{\mathfrak{p}}(\alpha)\geqq 0$ und folglich nach 3. $\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega)=0$.

Hilfssatz 2. Wir zeigen zunächst: Es gibt ein $\omega\in M^t(L/k_0)$ mit $v_{\mathfrak{q}}(\omega)=-1$ und $v_{\mathfrak{p}}\left(S_{L\,K,\mathfrak{q}}(\omega)\right)=-1$, $\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}$. Wie im Beweis von Hilfssatz 1 ergibt sich dies für einen p-Schritt und einen separablen Schritt jeweils aus der Bedeutung des Differentenexponenten. Durch Zusammensetzung erhält man daraus die Behauptung: Für $K_{i-1}\supset K_i\supset K_{i-1}$ und Primdivisoren $\mathfrak{q}_{i+1}\to\mathfrak{q}_i\to\mathfrak{q}_{i-1}$ ist $S_{K_{i+1}/K_{i-1},\mathfrak{q}_{i-1}}=S_{K_i/K_{i-1},\mathfrak{q}_i}\circ S_{K_{i-1}/K_i,\mathfrak{q}_{i+1}}$. Es gibt nun ein $\omega\in M^t(K_{i+1}/k_0)$ mit $v_{\mathfrak{q}_{i+1}}(\omega)=-1$ und $v_{\mathfrak{q}_i}\left(S_{K_{i+1}/K_i,\mathfrak{q}_{i+1}}(\omega)\right)=-1$ und ein $\pi\in M^t(K_i/k_0)$ mit $v_{\mathfrak{q}_i}(\pi)=-1$ und $v_{\mathfrak{q}_{i-1}}\left(S_{K_i K_{i-1},\mathfrak{q}_i}(\pi)\right)=-1$. Nun sind $S_{K_{i+1}K_i,\mathfrak{q}_{i+1}}(\omega)$, $\pi\in M^t(K_i/k_0)$ und haben beide den $\mathfrak{q}_i$-Wert -1. Folglich ist $\pi=\varkappa\cdot S_{K_{i+1}K_i,\mathfrak{q}_{i+1}}(\omega)$ mit $\varkappa\in K_i$ und $v_{\mathfrak{q}_i}(\varkappa)=0$. Dann ist $S_{K_{i+1}/K_i,\mathfrak{q}_{i+1}}(\varkappa\,\omega)=\pi$, also $v_{\mathfrak{q}_{i+1}}(\varkappa\,\omega)=-1$ und $v_{\mathfrak{q}_{i-1}}\left(S_{K_{i-1}K_{i-1},\mathfrak{q}_{i+1}}(\varkappa\,\omega)\right)=-1$. Damit ergibt sich nun Hilfssatz 2: Es gibt zunächst ein $\omega\in M^t(L/k_0)$ mit $v_{\mathfrak{q}}(\omega)=-1$ und $v_{\mathfrak{p}}\left(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)\right)=-1$, $\mathfrak{q}\to\mathfrak{p}$. Wie im Beweis von Hilfssatz 1 ist dann auch in $S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega)=\alpha\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_t\wedge dx$ $v_{\mathfrak{p}}(\alpha)=-1$. Die Partialbruchzerlegung in x von α hat also, wenn $p(x)\in k[x]$ das zu $\mathfrak{p}$ gehörige normierte Primpolynom bezeichnet, die Gestalt $\alpha=\frac{z(x)}{p(x)}+\beta$, $v_{\mathfrak{p}}(\beta)\geqq 0$, $z(x)\in k[x]$, Grad $z(x)=r\leqq s-1$, $s=$ Grad $p(x)$. Wegen $x^{(s-1)-r}\alpha=\frac{x^{(s-1)-r}z(x)}{p(x)}+x^{(s-1)-r}\beta$, $v_{\mathfrak{p}}(x^{(s-1)-r}\beta)\geqq 0$, und Grad $x^{(s-1)-r}z(x)=s-1$ ist für $\omega'=x^{(s-1)-r}\cdot\omega\in M^t(L/k_0)$ $S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega')=x^{(s-1)-r}\alpha\cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_{t-1}\wedge dx$, also $v_{\mathfrak{q}}(\omega')=-1$ und

$$\operatorname{res}_{\mathfrak{q}}(\omega')=\operatorname{res}_{\mathfrak{p}}\left(S_{L/K,\mathfrak{q}}(\omega')\right)\neq 0.$$

Bemerkung. Die beim Beweis der Hilfssätze 1 und 2 sich ergebenden Aussagen über $S_{L/K,\mathfrak{q}}$ sind offenbar unter den allgemeineren Voraussetzungen von 1., also für beliebige Dimensionen, richtig.

7. Der Fall separabler Funktionenkörper

Der Funktionenkörper L/k sei nun *separabel*, wobei auch der bisher ausgeschlossene Fall der *Charakteristik* 0 zugelassen werde. Wir betrachten dann den Differentialmodul $M(L/k)$ über dem arithmetischen Konstantenkörper k und anstelle von $M^t(L/k_0)$ das über L eindimensionale $M(L/k)$ selbst. K sei ein rationaler Zwischenkörper, so daß L/K separabel algebraisch ist. Mit der in 1. b) und 2. definierten Spur und dem in 3. definierten Residuum beweist man nun unverändert den Residuensatz und definiert wie in 5. ein Skalarprodukt $\langle \omega, r \rangle$ zwischen $\omega \in \Omega = M(L/k)$ und $r \in R$. Die Zuordnung $\omega \to \Theta(\omega)$ liefert dann wie in 5. einen L-Isomorphismus zwischen Ω und J. Nicht übertragen läßt sich jedoch bei unvollkommenem k der auf die Divisoren bezügliche Teil unserer obigen Überlegungen. Dem entspricht die Feststellung in [4], § 6, daß die „natürliche" Divisordefinition aus [4], § 4 für Formen aus $M(L/k)$, also bei Differentiation über dem arithmetischem Konstantenkörper, nicht zur richtigen kanonischen Klasse führt. Daß sich trotzdem eine vernünftige Dualität auch mit den Differentialen aus $M(L/k)$ herstellen läßt, läßt den den Schluß zu, daß die in [4], § 4 angegebene Divisordefinition nicht das Richtige trifft. Und zwar ist dies genau für diejenigen Stellen $\mathfrak{q}$ mit zugehörigen Bewertungsringen $S_\mathfrak{q}$ der Fall, für die $M(S_\mathfrak{q}/k)$ *Torsion* hat, also *nicht* isomorph in $M(L/k)$ eingebettet ist. Nach [3], § 3 sind dies genau die Stellen $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{D}_1(S_\mathfrak{q}/k) \neq (1)$, und das Produkt $\prod_\mathfrak{q} \mathfrak{D}_1(S_\mathfrak{q}/k)$ gibt in [4], § 6 auch gerade die Abweichung von der richtigen kanonischen Klasse an. Natürlich läßt sich im Falle der Charakteristik 0 das in 5. und 6. über Divisoren Bewiesene ebenfalls zeigen, und zwar im Wesentlichen unverändert wie in den Fällen b), wenn man nur immer anstelle der dortigen zu Primdivisoren $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ speziell gewählten p-Basen Systeme uniformierender Parameter zu $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ verwendet.

Literatur

[1] CHEVALLEY, C.: Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable. New York 1951.

[2] EICHLER, M.: Differentiale und Riemann-Rochscher Satz in algebraischen Funktionenkörpern einer Variablen. Hamb. Abh. **24**, 5—11 (1960).

[3] KUNZ, E.: Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen. J. reine angew. Math. **204**, 165—182 (1960).

[4] KUNZ, E.: Differentialformen inseparabler algebraischer Funktionenkörper. Math. Z. 76, 55—74 (1961).

[5] LAMPRECHT, E.: Über s-Differenten und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Variablen. Arch. Math. **4**, 412—424 (1953).

[6] ROQUETTE, P.: Über den Riemann-Rochschen Satz in Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1. Math. Nachr. **19**, 375—404 (1958).

[7] SERRE, J. P.: Groupes algébriques et corps de classes, Paris 1959.

[8] TATE, J.: Genus Change in Inseparabel Extensions of Function Fields. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 400—406 (1952).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. Oktober 1960)

André, J.
Math. Zeitschr. 76, 85—102 (1961)

Über Parallelstrukturen*)

Teil I: Grundbegriffe

Von

Johannes André

Einleitung

1. Die Translationsebenen sind unter den affinen Ebenen dadurch gekennzeichnet, daß ihre Translationsgruppen transitiv auf den Punkten sind, d.h. daß es zu je zwei Punkten immer eine (und damit dann genau eine) Translation gibt, die den einen in den anderen Punkt abbildet. Durch die grundlegenden Untersuchungen von M. Hall (1943) u. a.[1]) hat man einen, wenn auch noch unvollständigen, Einblick in ihre Struktur gewonnen. Zur tieferen Einsicht scheint es zweckmäßig, die Translationsebenen dahingehend zu verallgemeinern, daß die Forderung der Transitivität der Translationsgruppe etwas abgeschwächt wird. Folgende Fälle in dieser Hinsicht wurden bisher untersucht: (a) Transitivität nur auf den Punkten einer Geraden, das ergibt Ebenen über den sog. cartesischen Gruppen [Baer (1942)]; (b) Existenz von nichtidentischen Translationen in jeder Richtung, und als weitere Verallgemeinerung davon (c) Existenz nichtidentischer Translationen längs mindestens zweier Richtungen. Diese letzten beiden Typen wurden erst kürzlich [André (1958), (1959)] eingeführt und T- bzw. t-Ebenen genannt. Zunächst erhebt sich die Frage, ob es überhaupt Ebenen mit diesen Eigenschaften gibt, die keine Translationsebenen sind. Das ist in der Tat der Fall: In André (1959) wurden Beispiele von T-Ebenen angegeben, die keine Translationsebenen sind[2]). Man gewinnt sie aus der (desarguesschen) Ebene über dem rationalen Zahlkörper durch geeignetes „Knicken" von Geraden, ähnlich wie es etwa Moulton (1902), Naumann (1954, a) und Lombardo-Radice (1954) durchgeführt haben. Auf ähnliche Weise kann man auch t-Ebenen finden, die keine T-Ebenen sind. Über die allgemeine Struktur solcher Gebilde ist damit natürlich nichts ausgesagt. Es ist z.B. nicht bekannt, ob es *endliche* T-Ebenen gibt, die keine Translationsebenen sind[3]). Bisher weiß man folgendes [André (1958), Zappa (1959)]: Die Gruppe aller zentralen Kollineationen (Translationen und Streckungen) muß in einer endlichen T-Ebene[4]), die keine Translationsebene ist,

*) Teil einer von der Naturwissenschaftlich-Philosophischen Fakultät der Technischen Hochschule Braunschweig angenommenen Habilitationsschrift.

[1]) Eine zusammenfassende Darstellung über die Translationsebenen (mit Literaturangaben) findet man in Pickert (1955), S. 199—220.

[2]) Weitere Beispiele von T-Ebenen, sogar mit topologischer Struktur, die keine Translationsebenen sind, findet man in Salzmann (1958).

[3]) Dagegen gibt es endliche t-Ebenen, die keine Translationsebenen sind; vgl. dazu Hughes (1957), Zappa (1959).

[4]) Dies gilt auch unter der Annahme, daß es sich nur um eine t-Ebene handelt.

die Menge der Punkte in mindestens *drei* Transitivitätsgebiete zerlegen. Außerdem muß eine solche Ebene mehr als 81 (eigentliche) Punkte besitzen. Weitergehende Aussagen hat man nicht.

2. Zur genaueren Untersuchung der Eigenschaften von t- oder T-Ebenen erweist es sich als zweckmäßig, allgemeinere geometrische Strukturen zu betrachten, die sog. Parallelstrukturen. Ihre systematische Untersuchung ist der Inhalt dieser und drei weiterer Arbeiten. Bei den Parallelstrukturen ist, wie der Name schon andeuten soll, die Parallelität von Geraden der zentrale Begriff: Eine affine Parallelstruktur (a.P). ist eine Menge von Punkten und Geraden derart, daß durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht (somit zwei verschiedene Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam haben) und daß gewisse Paare von Geraden als zueinander „parallel" gelten, wobei das Euklidische Parallelenaxiom gültig sei; ferner müssen genügend viele Punkte vorhanden sein (Reichhaltigkeitsaxiom), genauer soll es drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte geben und jede Gerade mindestens einen Punkt enthalten. Während bei den affinen Ebenen durch die geometrische Struktur die Parallelität der Geraden festgelegt ist (genau die sich nicht schneidenden Geraden sind dort zueinander parallel), muß bei den a.P. *definiert* werden, welche Geraden als parallel gelten sollen: Zwei verschiedene parallele Geraden schneiden sich zwar nicht, es kann aber, im Gegensatz zu Ebenen, auch nichtparallele Geraden ohne gemeinsamen Punkt geben (sog. windschiefe Geraden).

Man kann leicht Beispiele von a.P. bilden, die keine Ebenen sind. Das einfachste dieser Art ist ein n-dimensionaler affiner Raum mit $n>2$, dessen eindimensionale Unterräume die Geraden unserer a.P. sind und deren Parallelität im Raum sich auf die a.P. überträgt.

Ganz entsprechend, wie man von einer affinen zur projektiven Ebene gelangt, kommt man durch Einführung uneigentlicher Elemente von einer a.P. zu einer projektiven Parallelstruktur (p.P.), die man auch axiomatisch kennzeichnen kann (s. § 2). Im Verlauf dieser und der weiteren Arbeiten ist aber hauptsächlich von a.P. die Rede.

3. Die vorliegende Note bringt die nötigen Grundbegriffe, während die weiteren drei Teile der Untersuchung spezieller Parallelstrukturen gewidmet sind, die in Analogie zu den Translationsebenen, t- bzw. T-Ebenen durch die Existenz genügend vieler Translationen gekennzeichnet sind. Zunächst bringt § 1 in Anlehnung an PICKERT (1955), Kap. 1.1, Begriff und Eigenschaften der Inzidenzstrukturen, soweit sie im folgenden benötigt werden. In § 2 werden dann die projektiven und affinen Parallelstrukturen definiert, und die oben skizzierte Beziehung zwischen beiden hergeleitet. Durch Dualisierung (d.h. Umwandlung von Punkten in Geraden und umgekehrt bei Erhaltung der Inzidenz) speziellerer Parallelstrukturen gelangt man zu einem andersgearteten Typ geometrischer Strukturen, den wohlbekannten Geweben [vgl. z.B. BLASCHKE-BOL (1938), PICKERT (1955), REIDEMEISTER (1930)]. In § 3 wird dieser Zusammenhang behandelt.

In § 4 werden die Kollineationen eingeführt und einige ihrer speziellen Typen wie Translationen und Streckungen genauer untersucht; alle diese

Begriffe werden ganz analog wie bei Ebenen definiert. Die Menge aller Kollineationen bildet (bei üblicher Einführung der Multiplikation) wieder eine Gruppe. Dagegen ist keineswegs sicher (und für den allgemeinen Fall weder bewiesen noch widerlegt), ob auch die Translationen eine Gruppe bilden. Die Schwierigkeit liegt darin, zu zeigen, daß auch das Produkt zweier Translationen keinen Punkt festläßt, oder aber die Identität ist. Der Beweis für die affinen Ebenen [Baer (1942); Pickert (1955), S. 65] läßt sich auf den allgemeinen Fall nicht übertragen.

Noch einen Unterschied gibt es gegenüber den bekannten Sätzen in Ebenen: Während dort eine Translation mit einer Geraden auch jede zu ihr parallele (als Ganzes) festläßt, d.h. ein (uneigentliches) „Zentrum" besitzt (oder „zentral" ist), braucht dies bei Parallelstrukturen nicht der Fall zu sein, Beispiele hierfür werden in Teil II angegeben. Wir werden uns aber hauptsächlich (in den Teilen III und IV sogar ausschließlich) mit Parallelstrukturen beschäftigen, in denen jede Translation zentral ist; in solchen Strukturen bilden übrigens die Translationen eine Gruppe, was genau so wie bei Ebenen bewiesen werden kann. Dieser Satz kann auch noch für endliche Parallelstrukturen bewiesen werden; dies gelingt aber bisher nur mit Hilfe der Theorie der Gruppencharaktere. In einem abschließenden § 5 wird dieser Zusammenhang gebracht.

4. Für diese und die folgenden Noten über Parallelstrukturen werden durchweg folgende einheitliche Bezeichnungen eingeführt: Mit kleinen lateinischen Buchstaben werden — neben den natürlichen Zahlen — Punkte gekennzeichnet, mit großen lateinischen Buchstaben Mengen von Punkten, insbesondere Geraden (die hier im allgemeinen als Menge der auf ihr liegenden Punkte gedeutet werden), mit großen Frakturbuchstaben schließlich Mengen von Punktmengen, speziell Geradenmengen. Abbildungen, insbesondere Kollineationen, und Mengen von solchen werden mit kleinen bzw. großen griechischen Buchstaben bezeichnet. Große Schreibschriftlettern stehen für Inzidenzstrukturen, während die kleinen für Inzidenzstrukturen mit Parallelitätsrelationen, in diesen Noten für affine Parallelstrukturen, vorbehalten sind.

§ 1. Inzidenzstrukturen

1. Vorgegeben seien zwei nicht leere Mengen P und $\mathfrak{G}$, deren Elemente wir *Punkte* bzw. *Geraden* nennen wollen. Zwischen ihnen sei eine Relation I, genannt *Inzidenz* festgelegt, d.h. es soll eindeutig feststehen, ob ein Punkt $p \in P$ mit einer Geraden $G \in \mathfrak{G}$ in Inzidenz steht oder nicht. Im ersten Fall sagen wir „p inzidiert mit G", „p ist mit G inzident", oder auch „p liegt in G", „G enthält p", oder „G geht durch p"; wir schreiben dafür $p\,\mathrm{I}\,G$. Die Negation der Inzidenz („p inzidiert nicht mit G") bezeichnen wir mit $p\,\mathrm{I}\!\!\!/\,G$.

Definition. Ein Paar $\mathfrak{I} = (P, \mathfrak{G}, \mathrm{I})$ nicht leerer Mengen P und $\mathfrak{G}$ mit einer Inzidenzrelation I zwischen deren Elementen nennen wir *Inzidenzstruktur*[5]), wenn gilt:

[5]) Von M. Hall in (1943), S. 233 als "partial plane" eingeführt. Den Namen "Inzidenzstruktur" hat G. Pickert [(1955), S. 2ff.] zuerst verwendet.

(i) *Aus den vier Inzidenzen* $p_i \mathrm{I} G_k$ $(p_i \in P,\ G_k \in \mathfrak{G};\ i, k = 1, 2)$ *folgt* $p_1 = p_2$ *oder* $G_1 = G_2$.

Das besagt, daß durch zwei verschiedene Punkte höchstens eine Gerade geht, und zwei verschiedene Geraden höchstens einen Punkt gemeinsam haben.

Beispiele von Inzidenzstrukturen sind beliebige nicht leere Untermengen von Punkten und Geraden einer projektiven Ebene [PICKERT (1955), S. 7] mit den in ihr gegebenen Inzidenzen. Dies ergibt übrigens bereits alle Inzidenzstrukturen: M. HALL [(1943), S. 236—244] bettete nämlich jede Inzidenzstruktur vermöge einer Art „freien Erweiterung" in eine projektive Ebene ein.

2. Statt $(P, \mathfrak{G}, \mathrm{I})$ schreiben wir auch kürzer $(P, \mathfrak{G})$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist. Die Mengen P und $\mathfrak{G}$ sind in $\mathfrak{I} = (P, \mathfrak{G})$ völlig gleichberechtigt. Statt $p \mathrm{I} G$ $(p \in P,\ G \in \mathfrak{G})$ schreiben wir auch $p \in G$. Man kann nämlich die Inzidenz im allgemeinen als mengentheoretische Enthaltenseinsrelation $\in$ deuten: Inzidiert jede Gerade G einer Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ mit mindestens zwei Punkten [$\mathfrak{I}$ heißt in diesem Falle *regulär*, vgl. PICKERT (1955), S. 2], so können wir G auffassen als Menge der mit ihr inzidierenden Punkte; nach (i) ist G durch diese Menge eindeutig bestimmt. Diesen Standpunkt werden wir im folgenden häufig mit Vorteil einnehmen[6]). Ausdrücklich sei jedoch vermerkt, daß wir das Zeichen $\in$ (anstatt I) für die Inzidenz eines Punktes mit einer Geraden auch bei nicht regulären Inzidenzstrukturen verwenden werden.

3. Liegen zwei verschiedene Punkte p und q einer Inzidenzstruktur $\mathfrak{I}$ auf einer Geraden (und damit wegen Axiom (i) auf genau einer), so sagen wir auch, p sei mit q *verbindbar*; die gemeinsame Gerade nennen wir die *Verbindungs*gerade von p mit q und bezeichnen sie mit $\langle p, q \rangle_{\mathfrak{I}}$ oder auch einfach mit $\langle p, q \rangle$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist. Es ist $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$. Existiert keine durch p und q gehende Gerade, ist also p mit q nicht verbindbar, so ist $\langle p, q \rangle$ nicht definiert[7]).

Haben zwei verschiedene Geraden G und G' einen (und dann genau einen) Punkt gemeinsam, so sagen wir auch, G und G' *schneiden* sich; den gemeinsamen Punkt $G \cap G'$ bezeichnen wir als *Schnittpunkt* von G mit G'. Schneiden sich G und G' nicht und ist $G \neq G'$, so ist $G \cap G'$ leer: $G \cap G' = \emptyset$.

4. Die beiden folgenden Begriffe sind für das Weitere wichtig.

DEFINITION. Eine Gerade einer Inzidenzstruktur heißt *Hauptgerade*, wenn sie mit *jeder* anderen Geraden dieser Struktur einen (und damit genau einen) Punkt gemeinsam hat.

[6]) Da Punkte und Geraden gleichberechtigt sind [wegen ihrer symmetrischen Stellung in Axiom (i)], könnten wir natürlich dieselbe Auffassung hinsichtlich der Geraden einnehmen (d.h. einen Punkt als Menge der durch ihn gehenden Geraden auffassen: Geradenbüschel). Das wird aber in dieser Arbeit nicht geschehen.

[7]) Wenn wir $\langle p, q \rangle$ schreiben, so soll damit immer stillschweigend vorausgesetzt sein, daß p mit q verbindbar sei. Insbesondere ist dann $p \neq q$.

Dual[8]) dazu wird der Begriff des Hauptpunktes eingeführt. Ein Punkt einer Inzidenzstruktur heißt somit *Hauptpunkt*, wenn er mit *jedem* anderen Punkt der Struktur verbindbar ist.

In projektiven Ebenen ist also jede Gerade Hauptgerade und jeder Punkt Hauptpunkt, und sie sind dadurch, abgesehen von einem Reichhaltigkeitsaxiom [das besagt, daß es vier Punkte gibt, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, vgl. PICKERT (1955), S. 7, (18)], unter den Inzidenzstrukturen gekennzeichnet. In affinen Ebenen [PICKERT (1955), S. 10] ist zwar jeder Punkt Hauptpunkt, aber keine Gerade Hauptgerade.

§ 2. Projektive und affine Parallelstrukturen

1. DEFINITION. Eine *projektive Parallelstruktur* (p. P.) $\mathscr{P} = (P, \mathfrak{G})$ ist eine Inzidenzstruktur mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(p 1) *Jeder Punkt von $\mathscr{P}$ ist Hauptpunkt.*

(p 2) *$\mathscr{P}$ enthält mindestens eine Hauptgerade H.*

(p 3) *$\mathscr{P}$ enthält außerhalb H mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen* (d. h. ein nichtausgeartetes Dreieck).

(p 4) *Jede Gerade von $\mathscr{P}$ enthält mindestens zwei Punkte.*

BEISPIEL EINER p. P. Die Punkte der gewünschten p. P. sind die Punkte eines n-dimensionalen projektiven Raumes, als Geraden nehmen wir einerseits eine Hyperebene H und andererseits die nicht in H gelegenen Geraden (des projektiven Raumes). Offensichtlich ist H eine Hauptgerade der Struktur (und zwar die einzige, wenn $n > 2$ ist). Auch die Gültigkeit der übrigen Axiome ist sofort einzusehen.

BEMERKUNGEN. Axiom (p 1) bedeutet: *Durch je zwei verschiedene Punkte von $\mathscr{P}$ geht genau eine Gerade.* Wegen (p 2) kann man, wie gleich gezeigt wird, in einer aus $\mathscr{P}$ abgeleiteten Inzidenzstruktur eine vernünftige Parallelitätsrelation einführen. Die Axiome (p 3) und (p 4) sind Reichhaltigkeitsaussagen. Aus (p 3) folgt, daß H mindestens drei Punkte enthält. Sind nämlich p_i $(i = 1, 2, 3)$ drei Punkte mit der in (p 3) geforderten Eigenschaft, so sind $H \cap \langle p_i, p_j \rangle$ $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ drei voneinander verschiedene auf H gelegene Punkte. Wir können jetzt (p 3) für *jede* Gerade von $\mathscr{P}$ beweisen, also:

$\mathscr{P}$ enthält außerhalb jeder Geraden mindestens drei nicht auf einer Geraden gelegenen Punkte (die aber eventuell teilweise auf H liegen können).

Sei nämlich G von H eine verschiedene Gerade. Voraussetzungsgemäß enthält H mindestens drei Punkte, also wenigstens zwei, p und q, außerhalb G. Nach (p 3) enthält $\mathscr{P}$ ferner einen weder zu G noch zu H gehörigen Punkt r. Offenbar sind p, q und r Punkte mit der gewünschten Eigenschaft. Nun kann man ganz entsprechend wie eben schließen:

SATZ 2.1. *Jede Hauptgerade einer p. P. enthält mindestens drei Punkte.*

Beim Beweis wird natürlich die Hauptgeradeneigenschaft wesentlich benutzt, und somit muß (p 4), die Existenz von genügend vielen Punkten auf

[8]) Zum Begriff der Dualität und des Dualitätsprinzips s. etwa PICKERT (1955), S. 2/3.

jeder Geraden, extra gefordert werden. Daß (p 4) von den Axiomen (p 1) bis (p 3) tatsächlich unabhängig ist, erkennt man an dem folgenden einfachen Beispiel: Sei $\mathscr{P}$ eine p.P. (im Sinne der oben angegebenen Definition), H eine Hauptgerade von $\mathscr{P}$ und p ein Punkt von H. Wir erweitern jetzt $\mathscr{P}$ auf folgende Weise zu einer Inzidenzstruktur $\overline{\mathscr{P}}$: Die Punkte von $\mathscr{P}$ und $\overline{\mathscr{P}}$ sollen dieselben sein. Zu den Geraden von $\mathscr{P}$ soll noch genau eine weitere hinzugenommen werden, die p, aber keinen anderen Punkt enthält. Offensichtlich erfüllt $\overline{\mathscr{P}}$ die Axiome (p 1) bis (p 3) [wiederum mit H als Hauptgerade], jedoch nicht (p 4).

2. Für uns im folgenden wichtiger ist der Begriff der *affinen Parallelstruktur* (a.P.)[9], den wir jetzt aus demjenigen der p.P. entwickeln wollen: Sei H eine Hauptgerade der p.P. $\mathscr{P}=(P, \mathfrak{G})$. Wir bilden durch Wegnahme der Geraden H und der auf ihr gelegenen Punkte eine neue Struktur $\mathfrak{p}=\mathscr{P}_H=(P-H, \mathfrak{G}-\{H\})$ [die wir affine Parallelstruktur nennen wollen], ganz entsprechend, wie man aus einer projektiven Ebene durch Fortnahme einer Geraden eine affine Ebene erhält [s. z.B. PICKERT (1955), S. 9—11]: Die *Punkte* von $\mathfrak{p}$ sind die nicht in H liegenden Punkte von $\mathscr{P}$. Die *Geraden* von $\mathfrak{p}$ sind alle von H verschiedenen Geraden von $\mathscr{P}$. Ein Punkt $p \in P-H$ soll genau dann mit einer Geraden $G \in \mathfrak{G}-\{H\}$ in $\mathfrak{p}$ *inzidieren*, wenn p mit G in $\mathscr{P}$ inzidiert[10]. Außerdem führen wir im Geradenbereich von $\mathfrak{p}$ eine Relation, genannt *Parallelität*, auf folgende Weise ein: Zwei Geraden G und G' von $\mathfrak{p}$ heißen genau dann zueinander *parallel*, wenn $G \cap H = G' \cap H$ in $\mathscr{P}$ gilt[11]. Wir sagen in diesem Falle auch: „G ist zu G' parallel", „G ist Parallele zu G'", oder „G und G' liegen parallel zueinander" und schreiben dafür $G \| G'$. Die so erhaltene Parallelitätsrelation erfüllt offensichtlich die drei Äquivalenzbedingungen; wir können also die Menge $\mathfrak{G}-\{H\}$ der Geraden von $\mathfrak{p}$ in Klassen paralleler Geraden einteilen.

Die so konstruierte Struktur $\mathfrak{p}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(a 0) *$\mathfrak{p}$ ist eine Inzidenzstruktur.*

(a 1) *Jeder Punkt von $\mathfrak{p}$ ist Hauptpunkt.*

(a 2) *Es gibt eine Einteilung der Geraden von $\mathfrak{p}$ in Klassen paralleler derart, daß es zu jedem Punkt p und jeder Geraden G genau eine zu G parallele Gerade durch p gibt.* (Euklidisches Parallelenaxiom.)

(a 3) *$\mathfrak{p}$ enthält mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

(a 4) *Jede Gerade von $\mathfrak{p}$ enthält mindestens einen Punkt.*

BEISPIEL. Aus dem im Anschluß an die Definition der p.P. gebrachten Beispiel erhält man durch Entfernung von H folgende a.P.: Punkte, Geraden

[9]) Eine ähnliche Struktur wurde von G. ZAPPA (1959) unter dem Namen „piano parziale con parallelismo" eingeführt.

[10]) Hierbei ist zu beachten, daß $\mathfrak{p}$ nicht mehr regulär zu sein braucht, denn nach Herausnahme von H kann es Geraden mit nur einem Punkt geben. Auch in diesem Fall sollen aber (definitionsgemäß) verschiedene Geraden von $\mathscr{P}$ nach Herausnahme von H zu verschiedenen Geraden von $\mathfrak{p}$ werden.

[11]) Wegen der Hauptgeradeneigenschaft von H ist jedenfalls $G \cap H \neq \emptyset$ in $\mathscr{P}$.

und Parallelität in der Struktur entsprechen den Punkten, Geraden und der Parallelität (im üblichen Sinne) eines affinen n-dimensionalen Raumes.

Bemerkung. Während die Struktur einer p.P. durch die Inzidenzen von Punkten und Geraden eindeutig festgelegt ist, genügt dies für die Bestimmung einer a.P. nicht; hierzu muß zusätzlich, wie in (a 2) dargelegt, die Parallelenrelation eingeführt werden.

Beweis von (a 0) bis (a 4). Als Unterstruktur [Pickert (1955), S. 3] von $\mathfrak{P}$ ist $\mathfrak{p}$ wieder eine Inzidenzstruktur, also gilt (a 0). Die Verbindungsgerade von p mit q ($p, q \in P - H$; $p \neq q$) existiert und stimmt mit derjenigen in $\mathfrak{P}$ überein [12]), mithin ist auch (a 1) erfüllt. Zum Beweis von (a 2) sei $p \in P - H$ und $G \in \mathfrak{G} - \{H\}$. Dann ist $\langle G, H, p \rangle$, aufgefaßt als Gerade von $\mathfrak{p}$, eine Parallele zu G durch p. Weitere Geraden mit dieser Eigenschaft gibt es nicht, weil $\mathfrak{P}$ eine Inzidenzstruktur ist. Die Reichhaltigkeitsaussagen (a 3) und (a 4) folgen sofort aus den entsprechenden Axiomen (p 3) und (p 4).

Die [nach (a 2) eindeutig bestimmte] zu G parallele Gerade durch p bezeichnen wir mit $\langle G \| p \rangle_{\mathfrak{p}}$ oder auch kurz mit $\langle G \| p \rangle$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist. Aus (a 2) folgt sofort, daß zwei voneinander verschiedene parallele Geraden in $\mathfrak{p}$ keinen Punkt gemeinsam haben. Dagegen gilt die Umkehrung nicht: Es gibt a.P. mit Geraden, die sich nicht schneiden, ohne zueinander parallel zu sein (sie treten im letztgenannten Beispiel auf, wenn $n > 2$ ist); Geraden mit dieser Eigenschaft nennen wir zueinander *windschief*. Die affinen Ebenen sind unter den a.P. dadurch ausgezeichnet, daß es in ihnen keine zueinander windschiefen Geraden gibt.

3. Wir wollen jetzt umgekehrt zeigen, daß man jede Struktur mit den Eigenschaften (a 0) bis (a 4) auf die oben beschriebene Weise (d.h. durch Fortnahme einer Hauptgeraden aus einer p.P.) erhalten kann. Wir sind dann berechtigt, *eine a.P. axiomatisch als eine Struktur mit den Eigenschaften* (a 0) *bis* (a 4) *zu erklären* [13]). Die jetzt durchzuführende Erweiterung einer a.P. zu einer p.P. geht wieder ebenso vor sich wie die einer affinen zu einer projektiven Ebene.

Sei also $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ eine Struktur mit den Eigenschaften (a 0) bis (a 4); wir wollen sie in eine p.P. $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{P}$ einbetten in dem eben angedeuteten Sinne. Zu diesem Zwecke führen wir in $\mathfrak{p}$ zunächst „uneigentliche Punkte" ein, in ganz analoger Weise, wie dies bei affinen Ebenen geschieht [Pickert (1955), S. 11]. Als *uneigentlichen Punkt* $\hat{G}$ der Geraden $G \in \mathfrak{G}$ definieren wir die Menge aller in $\mathfrak{p}$ zu G parallelen Geraden. Somit ist $\hat{G} = \hat{G}'$ gleichbedeutend mit $G \| G'$.

Punkte von $\mathfrak{P}$ sind diejenigen von $\mathfrak{p}$ *(eigentliche Punkte)* und die eben definierten $\hat{G}$ mit $G \in \mathfrak{G}$ *(uneigentliche Punkte)*. *Geraden* von $\mathfrak{P}$ sind die von $\mathfrak{p}$ *(eigentliche Geraden)* und die Menge aller uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{p}$ die *uneigentliche Gerade*). Mit einer eigentlichen Geraden G sollen $\hat{G}$ und

[12]) Die Gerade $\langle p, q \rangle_{\mathfrak{p}}$ inzidiert also mit genau allen nicht in H gelegenen Punkten von $\langle p, q \rangle_{\mathfrak{P}}$.

[13]) Entsprechend wie bei den p.P. kann man zeigen, daß (a 4) von den übrigen Axiomen unabhängig ist.

genau diejenigen eigentlichen Punkte inzidieren, die bereits in $\mathfrak{p}$ auf G liegen. In der uneigentlichen Geraden sollen genau alle uneigentlichen Punkte liegen.

Wir zeigen jetzt, daß die so erhaltene Struktur $\mathscr{P}$ eine p.P. ist: Die Verbindungsgerade zweier eigentlicher Punkte ist dieselbe wie in $\mathfrak{p}$. Der eigentliche Punkt p wird mit $\hat{G}$ nach (a 2) eindeutig durch $\langle G \| p \rangle$ verbunden. Nun die uneigentliche Gerade enthält zwei verschiedene uneigentliche Punkte. Damit ist (p 1) bewiesen (und auch, daß $\mathscr{P}$ eine Inzidenzstruktur ist). Die uneigentliche Gerade H ist eine Hauptgerade, denn jede Gerade $G \neq H$ hat (definitionsgemäß) mit H den Schnittpunkt $\hat{G}$. Also gilt auch (p 2). Axiom (p 3) folgt sofort aus (a 3). Jede eigentliche Gerade G enthält mindestens zwei Punkte, nämlich $\hat{G}$ und nach (a 4) noch mindestens einen eigentlichen. Die uneigentliche Gerade enthält sogar wenigstens drei Punkte; denn nach (a 3) gibt es mindestens drei eigentliche Punkte p_i $(i=1, 2, 3)$, die nicht auf einer Geraden liegen, und die uneigentlichen Punkte der drei Geraden $\langle p_i, p_j \rangle$ $(i, j=1, 2, 3)$ sind voneinander verschieden. Damit haben wir auch (p 4) gewonnen.

4. In Ziffer 2 sind wir, ausgehend von einer p.P. zu einer a.P. gelangt, in Ziffer 3 umgekehrt von einer a.P. zu einer p.P. Wir wollen jetzt zeigen, daß man durch Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen wieder zur Ausgangsstruktur zurückkommt, d.h. wir wollen beweisen:

$$(\mathscr{P}_H)^* = \mathscr{P}, \tag{2.1}$$

$$(\mathfrak{p}^*)_H = \mathfrak{p}. \tag{2.2}$$

[Die Gl. (2.1) ist hierbei, wie gleich ausgeführt, im Sinne einer Identifizierung der Strukturen gemäß einem Isomorphismus zu verstehen.]

BEWEIS VON (2.1). Die nicht auf H gelegenen Punkte von $\mathscr{P}$ lassen wir bei dem zu konstruierenden Isomorphismus zwischen $\mathscr{P}$ und $(\mathscr{P}_H)^*$ sich selbst entsprechen. Ebenso sollen die von H verschiedenen Geraden identifiziert werden. Dem Punkt $q \in H$ ordnen wir in $(\mathscr{P}_H)^*$ den Punkt $\hat{Q}$ zu; hierbei ist Q irgendeine von H verschiedene Gerade von $\mathscr{P}$ [und damit auch von $(\mathscr{P}_H)^*$] durch q. Der Geraden H wird die Menge aller so erhaltenen Punkte $\hat{Q}$ zugeordnet. Man sieht sofort, daß die so beschriebene Abbildung einen Isomorphismus zwischen den beiden Strukturen vermittelt.

BEWEIS VON (2.2). Man erhält $\mathfrak{p}^*$ aus $\mathfrak{p}$ durch Hinzunahme von H und der darauf liegenden Punkte. Nimmt man diese aus $\mathfrak{p}^*$ wieder heraus, so kommt man zu $\mathfrak{p}$ zurück.

Die so gewonnene enge Beziehung zwischen den projektiven und affinen Parallelstrukturen verallgemeinert den bekannten Zusammenhang zwischen den projektiven und affinen Ebenen [vgl. PICKERT (1955), S. 7—12]. Auf diese Weise kann die Theorie der p.P. weitgehend auf die der a.P. zurückgeführt werden und umgekehrt. Wir werden uns im folgenden hauptsächlich mit a.P. beschäftigen.

5. Für spätere Untersuchungen benötigen wir den Begriff der *Unterstruktur* einer affinen Parallelstruktur. G. PICKERT hat in (1955), S. 3 eine Unterstruktur $\mathscr{I}'$ der Inzidenzstruktur $\mathscr{I}$ dadurch gekennzeichnet, daß die Punkt- und Geradenmenge von $\mathscr{I}'$ Untermengen der entsprechenden Mengen von $\mathscr{I}$ sein und die Inzidenzrelationen beim Übergang zur Unterstruktur erhalten bleiben sollen. Für die Unterstruktur $\mathfrak{p}'$ einer a.P. $\mathfrak{p}$ müssen wir außerdem noch fordern, daß auch die Parallelität erhalten bleibt. Mithin ist definitionsgemäß $\mathfrak{p}'=(P', \mathfrak{G}')$ eine Unterstruktur von $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$, wenn gilt:

(a) $P' \subseteq P$,

(b) $\mathfrak{G}' \subseteq \mathfrak{G}$,

(c) *ist* $p \in P'$ *und* $G \in \mathfrak{G}'$, *so inzidiert* p *mit* G *in* $\mathfrak{p}'$ *genau dann, wenn dies in* $\mathfrak{p}$ *der Fall ist,*

(d) $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}'$ *sind genau dann in* $\mathfrak{p}'$ *zueinander parallel, wenn sie es in* $\mathfrak{p}$ *sind.*

Ist $\mathfrak{p}'$ Unterstruktur von $\mathfrak{p}$, so schreiben wir dafür $\mathfrak{p}' \leqq \mathfrak{p}$. Wir sagen dann auch, $\mathfrak{p}$ sei eine *Erweiterung* oder *Oberstruktur* von $\mathfrak{p}'$, oder $\mathfrak{p}'$ sei in $\mathfrak{p}$ *eingebettet*. Übergang zu den zugehörigen p.P. ergibt offensichtlich, daß $\mathfrak{p}'^*$ Unterstruktur von $\mathfrak{p}^*$ [im Sinne von PICKERT (1955), S. 3] ist, wenn $\mathfrak{p}' \leqq \mathfrak{p}$ gilt.

Seien $\mathfrak{p}_i=(P_i, \mathfrak{G}_i)$ $[i=1, 2, \ldots]$ a.P. mit $\mathfrak{p}_1 \leqq \mathfrak{p}_2 \leqq \cdots$. Aus dieser Folge von Oberstrukturen bilden wir $\mathfrak{p}=(P, \mathfrak{G})$ auf folgende Weise: (a) Es gilt $P=\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ und $\mathfrak{G}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{G}_i$. (b) Sei $p \in P$ und $G \in \mathfrak{G}$, dann gibt es ein j mit $p \in P_j$ und $G \in \mathfrak{G}_j$; in $\mathfrak{p}$ soll p mit G genau dann inzidieren, wenn dies in $\mathfrak{p}_j$ der Fall ist. (c) Seien $G, G' \in \mathfrak{G}$, dann gibt es ein j mit $G, G' \in \mathfrak{G}_j$; genau dann soll G zu G' in $\mathfrak{G}$ parallel sein, wenn dies in $\mathfrak{G}_j$ der Fall ist. Man sieht sofort, daß $\mathfrak{p}$ eine a.P. ist; $\mathfrak{p}$ kann aufgefaßt werden als „kleinste" a.P., die alle $\mathfrak{p}_i$ als Unterstrukturen enthält. Wir nennen $\mathfrak{p}$ die *Vereinigung* der $\mathfrak{p}_i$ und schreiben $\mathfrak{p}=\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$.

§ 3. Gewebe

1. In diesem Paragraphen wollen wir eine Beziehung zwischen den Parallelstrukturen und den für viele Zweige der Geometrie wichtigen Geweben herstellen. Wir zeigen, daß die zu den Geweben dualen Strukturen spezielle p.P. sind.

DEFINITION. Es sei m eine natürliche Zahl $\geqq 3$. Ein *m-Gewebe* oder kurz Gewebe $\mathscr{G}$ ist eine Inzidenzstruktur mit folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

(g 1) *Jede Gerade von* $\mathscr{G}$ *ist Hauptgerade.*

(g 2) *In* $\mathscr{G}$ *gibt es m Hauptpunkte* $h_1, \ldots, h_m$; *sie liegen auf einer Geraden* H, *die keine weiteren Punkte mehr enthält.*

(g 3) $\mathscr{G}$ *enthält mindestens zwei nicht auf* H *gelegene Punkte (sog. gewöhnliche Punkte).*

BEMERKUNG. Das hier gebrachte Axiomensystem für Gewebe ist etwas schärfer als das in PICKERT (1955), S. 42 angegebene: Statt (g 3) fordert

G. PICKERT die Existenz nur *eines* außerhalb H gelegenen Punktes [Axiom (3) in PICKERT (1955), S. 42]. Damit scheiden hier nur leicht zu übersehende Fälle aus. Etwas einschneidender ist die zweite Verschärfung. Bei PICKERT müssen nämlich die Punkte h_i $(i=1, \ldots, m)$[14]) nicht notwendig auf einer Geraden liegen. Diese Forderung ist zwar für die Untersuchung von 3-Geweben nicht wesentlich, da man bei ihnen nur die von h_i verschiedenen Punkte untersucht [vgl. PICKERT (1955), S. 42—46]. Dagegen ist sie z.B. wichtig bei 4-Geweben; bei ihnen ist es häufig zweckmäßig anzunehmen, daß die Punkte h_i auf verschiedenen Geraden liegen [PICKERT (1955), S. 61 oben]. In diesem Falle ist der jetzt zu gewinnende Zusammenhang mit den Parallelstrukturen nicht vorhanden[15]).

2. Um ihn zu finden, suchen wir die Eigenschaften der zu $\mathcal{G}$ dualen Struktur $\mathcal{G}'$. Den Axiomen (g 1) bis (g 3) entsprechen:

(g' 1) *Jeder Punkt von $\mathcal{G}'$ ist Hauptpunkt.*

(g' 2) *In $\mathcal{G}'$ gibt es m $(\geqq 3)$ Hauptgeraden $H_1, \ldots, H_m$, die durch einen Punkt h gehen; durch h geht keine weitere Gerade.*

(g' 3) *$\mathcal{G}'$ enthält mindestens zwei nicht durch h gehende Geraden.*

Wir zeigen jetzt: *$\mathcal{G}'$ ist eine p.P.*

BEWEIS. Die Gültigkeit von (p 1) und (p 2) folgt sofort aus (g' 1) bzw. (g' 2). Seien G_1 und G_2 zwei [nach (g' 3) existierende] nicht durch h gehende Geraden von $\mathcal{G}'$. Die Punkte $G_i \cap H_k$ $(i=1, 2;\ k=2, 3)$ liegen außerhalb H_1, mindestens drei von ihnen sind verschieden und liegen nicht auf einer Geraden, das ergibt (p 3). Statt (p 4) beweisen wir weitergehend: *Jede Gerade von $\mathcal{G}'$ enthält mindestens m Punkte.* Für eine nicht durch h gehende Gerade G sind die m Punkte $G \cap H_i$ $(i=1, \ldots, m)$ paarweise verschieden. Sei nun $h \in G$, also wegen (g' 2) o.B.d.A. $G = H_1$. Ferner sei, wegen $m \geqq 3$ ebenfalls o.B.d.A., $G_1 \cap G_2 \notin H_2$, d.h. $p = G_1 \cap H_2 \neq G_2 \cap H_2$. Dann sind die auf H_1 gelegenen m Punkte $G_2 \cap H_1$ und $\langle G_2 \cap H_k,\ p \rangle \cap H_1$ $(k=2, 3, \ldots, m)$ paarweise verschieden. Somit enthält H_1 und ebenso auch alle anderen Geraden durch h mindestens m Punkte.

§ 4. Kollineationen

1. Eine isomorphe Abbildung einer Inzidenzstruktur $\mathcal{I}$ *auf sich* heißt Automorphismus oder *Kollineation* [PICKERT (1955), S. 4]. Eine Kollineation von $\mathcal{I}$ ist also eine eineindeutige inzidenzerhaltende Abbildung der Punkte und Geraden von $\mathcal{I}$ jeweils auf sich. Die Kollineationen von $\mathcal{I}$ bilden eine Gruppe Γ, wenn man, wie üblich, die Hintereinanderausführung zweier Abbildungen als Gruppenverknüpfung nimmt. Das Bild eines Punktes p bzw. einer Geraden G von $\mathcal{I}$ bei Anwendung von $\gamma \in \Gamma$ bezeichnen wir mit p^γ bzw. G^γ. Bei einer Kollineation gehen offensichtlich Hauptpunkte bzw. -geraden wieder jeweils in solche über.

[14]) In PICKERT (1955), S. 42ff. werden diese Punkte mit $A_1, \ldots, A_m$ bezeichnet.

[15]) Dies gilt z.B. auch für die in ARTZY (1953) und NAUMANN (1954, b) untersuchten 4-Gewebe.

Für eine *Kollineation* γ *einer a.P.* $\mathfrak{p}$ verlangen wir außer der Erhaltung der Inzidenz noch die *Erhaltung der Parallelität:* Aus $G \| G'$ folgt $G^\gamma \| G'^\gamma$. Man kann γ auf die uneigentlichen Punkte von $\mathfrak{p}$ erweitern und erhält so eine Kollineation der p.P. $\mathfrak{p}^*$, welche die uneigentliche Gerade festläßt. Umgekehrt: Jede Kollineation einer p.P. $\mathscr{P}$, die eine Hauptgerade H (als Ganzes) festläßt, induziert eine parallelenerhaltende Kollineation in der zugehörigen a.P. $\mathscr{P}_H$. Führt man diese beiden Prozesse (in irgendeiner Reihenfolge) hintereinander aus, so kommt man zu der Kollineation zurück, von der man ausging.

2. Definition. Eine Kollineation π einer p.P. $\mathscr{P}$, die *jeden* Punkt einer Hauptgeraden H von $\mathscr{P}$ festläßt, nennen wir *axial*[16]) hinsichtlich H. Wir bezeichnen H als eine *Achse*[17]) von π.

Satz 4.1. *Eine nichtidentische und hinsichtlich einer Hauptgeraden H einer p.P. axiale Kollineation hat außerhalb H höchstens einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir nehmen an, die bezüglich H axiale Kollineation π habe außerhalb H die beiden Fixpunkte p und q. Nach (p 3) gibt es mindestens einen Punkt, der weder auf H noch auf $\langle p, q\rangle$ liegt. Sei r ein solcher. Aus $p^\pi = p$ und $(\langle p, r\rangle \cap H)^\pi = \langle p, r\rangle \cap H$ folgt $\langle p, r\rangle^\pi = \langle p, r\rangle$, ebenso $\langle q, r\rangle^\pi = \langle q, r\rangle$ aus $q^\pi = q$. Wegen $r = \langle p, r\rangle \cap \langle q, r\rangle$ erhalten wir schließlich $r^\pi = r$. Mithin läßt π alle nicht auf $\langle p, q\rangle$ gelegenen Punkte fest. Aus $s \in \langle p, q\rangle$ und $s \neq p$ folgt aber $s \notin \langle p, r\rangle$, und wir können jetzt ganz entsprechend wie eben $s^\pi = s$ schließen. Alle Punkte bleiben also bei π fest. Wegen (p 4) bewegt π auch keine Gerade, mithin ist $\pi = \underline{1}$ die identische Kollineation, w.z.b.w.

Hieraus und aus Satz 2.1 folgt sofort der folgende

Zusatz. *Eine nichtidentische Kollineation einer p.P. kann axial hinsichtlich höchstens einer Geraden sein.*

Eine nichtidentische axiale Kollineation π hat also nur eine Achse, deshalb kann man in diesem Falle von *der* Achse von π reden.

Die bezüglich einer festen Achse H axialen Kollineationen bilden eine Untergruppe von Γ, die wir mit Π_H oder kurz mit Π bezeichnen, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

Eine Kollineation ζ einer p.P. $\mathscr{P}$ heißt *zentral* hinsichtlich eines Punktes p von $\mathscr{P}$, wenn $G^\zeta = G$ für jede durch p gehende Gerade G ist; insbesondere bleibt p selbst fest. Wir sagen, p sei ein *Zentrum* von ζ. Die hinsichtlich eines festen Punktes zentralen Kollineationen bilden eine Untergruppe von Γ.

In projektiven Ebenen gilt der Satz, daß jede axiale Kollineation auch zentral ist und umgekehrt [Baer (1942), Cor. 2.3; Pickert (1955), S. 65]. Diese einfache Beziehung braucht für allgemeine p.P. nicht mehr zu stimmen. So wird in Teil II gezeigt, daß es axiale nicht zentrale Kollineationen geben kann. Es gibt auch zentrale Kollineationen, die nicht axial sind, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $\mathscr{P} = (P, \mathfrak{G})$ eine p.P. und H eine ihrer Hauptgeraden. Wir erweitern

[16]) Auch *Perspektivität* genannt.

[17]) Aus der Gültigkeit der Aussage „H ist Achse von π" soll stets folgen, daß H eine Hauptgerade ist.

$\mathscr{P}$ zu einer Struktur $\tilde{\mathscr{P}}=(\tilde{P}, \tilde{\mathfrak{G}})$ in folgender Weise: Zu P fügen wir zwei neue Punkte a und b hinzu, die mit H, aber keiner weiteren Geraden aus $\mathfrak{G}$ inzidieren sollen: $\tilde{P}=P\cup\{a\}\cup\{b\}$; nunmehr erweitern wir $\mathfrak{G}$ zu $\tilde{\mathfrak{G}}$ durch Hinzunahme aller Mengen $\{a, p\}$ und $\{b, p\}$ mit $p\in P-H$, d.h. wir setzen

$$\tilde{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}\cup\bigcup_{p\in P-H}(\{a, p\}\cup\{b, p\})$$

und fordern, daß $\{a, p\}$ nur mit a und p inzidieren soll, ebenso $\{b, p\}$ nur mit b und p. Offensichtlich ist auch $\tilde{\mathscr{P}}$ eine p.P. Sei nun ζ eine Abbildung, die P und $\mathfrak{G}$ elementweise auf sich abbildet und für die $a^\zeta=b$ und $b^\zeta=a$, ferner $\{a, p\}^\zeta=\{b, p\}$ und $\{b, p\}^\zeta=\{a, p\}$ gilt. Man sieht sofort, daß ζ eine zentrale Kollineation von $\tilde{\mathscr{P}}$ mit jedem von a und b verschiedenen Punkt von H als Zentrum ist. Dagegen ist ζ nicht axial. Denn H bleibt bei ζ nicht punktweise fest (a und b werden vertauscht), ist also keine Achse von ζ. Weitere Hauptgeraden enthält aber $\tilde{\mathscr{P}}$ nicht. Sei nämlich $G\in\tilde{\mathfrak{G}}$ von H verschieden; mindestens einer der Punkte a und b liegt nicht in G; es gibt nach (p 3) mindestens einen nicht auf $G\cup H$ gelegenen Punkt p; mindestens eine der Geraden $\{a, p\}$, $\{b, p\}$ schneidet G nicht, also ist G keine Hauptgerade in $\tilde{\mathscr{P}}$. Mithin kann ζ auch keine andere Gerade als Achse haben, denn eine Achse ist definitionsgemäß notwendig Hauptgerade.

Das Beispiel zeigt auch, daß eine nichtidentische zentrale Kollineation mehrere Zentren haben kann. Im allgemeinen gilt also das duale Gegenstück zum Zusatz von Satz 4.1 nicht. Wir können es aber unter einer kleinen Zusatzvoraussetzung beweisen:

SATZ 4.2. *Eine nichtidentische Kollineation einer p.P., in der jede Gerade mindestens drei Punkte enthält, kann zentral hinsichtlich höchstens eines Punktes sein.*

BEWEIS. Seien p und q zwei Zentren der Kollineation ζ. Ist $r\notin\langle p, q\rangle$, so ist $r^\zeta=r$ wegen $r=\langle p, r\rangle\cap\langle q, r\rangle$. Sei nun $r\in\langle p, q\rangle$. Wegen (p 3) gibt es ein $s\notin\langle p, q\rangle$. Nach unserer zusätzlichen Voraussetzung enthält die Gerade $\langle r, s\rangle$ noch einen weiteren Punkt t. Wegen $s^\zeta=s$, $t^\zeta=t$ folgt nun $r^\zeta=r$, und ζ ist die Identität.

3. Wir betrachten jetzt die axialen Kollineationen hinsichtlich einer *festen* Achse H. In diesem Falle ist es oft zweckmäßig, statt der p.P. $\mathscr{P}$ die durch Fortnahme von H entstehende a.P. $\mathscr{P}_H=\mathfrak{p}$ den Untersuchungen zugrunde zu legen. Eine axiale Kollineation π induziert nach Ziffer 1 in $\mathfrak{p}$ eine Kollineation, die wir ebenfalls π nennen können und wollen; offensichtlich führt sie jede Gerade in eine zu ihr parallele über: $G^\pi\| G$ für jede Gerade G von $\mathfrak{p}$. Umgekehrt erzeugt jede Kollineation von $\mathfrak{p}$ mit dieser Eigenschaft eine axiale Kollineation auf der zugehörigen p.P. $\mathfrak{p}^*=\mathscr{P}$ (s. § 2) mit der uneigentlichen Geraden als Achse. Eine Kollineation einer a.P., die jede Gerade in eine zu ihr parallele abbildet, nennen wir *affin-axial* oder kurz *axial*[18]). Die Menge der affin-

[18]) Denn sie induziert in $\mathfrak{p}^*$ eine axiale Kollineation. Natürlich kann es in $\mathfrak{p}^*$ auch axiale Kollineationen hinsichtlich anderer Achsen geben, solche werden wir hier aber nicht untersuchen.

axialen Kollineationen bildet einen Normalteiler Π in der Gruppe Γ aller Kollineationen von $\mathfrak{p}$, denn es ist $G^{\gamma\pi\gamma^{-1}} \| G^{\gamma\gamma^{-1}} = G$ für $\gamma \in \Gamma$, $\pi \in \Pi$.

Satz 4.1 besagt affin, daß eine nichtidentische affin-axiale Kollineation höchstens einen (eigentlichen) Fixpunkt haben kann. Eine affin-axiale Kollineation von $\mathfrak{p}$ die entweder alle oder keinen Punkt festläßt, ist eine *Translation*, eine, die alle oder genau einen Punkt festhält, heißt *Streckung*. Auch die von ihnen in der zugehörigen p. P. $\mathfrak{p}^*$ induzierten Kollineationen bezeichnen wir als Translationen bzw. Streckungen.

Die Identität ist die einzige Kollineation, die sowohl Translation als auch Streckung ist. Jede affin-axiale Kollineation ist eine Translation oder eine Streckung. Jede Streckung ist zentral bezüglich ihres Fixpunktes. Dagegen braucht, im Gegensatz zu Ebenen, nicht jede Translation *zentral* zu sein (also ein Zentrum zu besitzen), wie in Teil II gezeigt wird. Falls eine Translation $\tau \neq \underline{1}$ ein Zentrum z besitzt, so ist dies ein uneigentlicher Punkt der a. P. $\mathfrak{p}$, denn im Eigentlichen hat τ definitionsgemäß keinen Fixpunkt, also auch kein Zentrum. Genau die durch z gehenden Geraden von $\mathfrak{p}$ bleiben bei Anwendung von τ (als Ganzes) fest, mit einer Geraden also auch die zu ihr parallelen und nur diese. Sei umgekehrt $\tau \neq \underline{1}$ eine Translation mit folgenden Eigenschaften: (a) Es gibt eine Gerade G mit $G^\tau = G$, (b) mit $G \| G'$ ist $G'^\tau = G'$ gleichwertig. Dann ist τ zentral mit dem uneigentlichen Punkt von G als Zentrum. Man kann eine zentrale Translation $\tau \neq \underline{1}$ auch durch die Gültigkeit von $\langle p, p^\tau \rangle \| \langle q, q^\tau \rangle$ für alle Punkte p, q kennzeichnen.

4. Die Streckungen mit dem Fixpunkt p bilden eine Untergruppe Π_p der Gruppe Π aller affin-axialen Kollineationen; die Elemente von Π_p nennen wir auch *p-Streckungen*. Nach Satz 4.1 haben Π_p und Π_q für $p \neq q$ nur die Identität gemeinsam: $\Pi_p \cap \Pi_q = \{\underline{1}\}$. Es ist allgemein nicht bekannt, ob die Translationen eine Untergruppe von Π bilden. Dies gilt zwar für Ebenen [Baer (1942), Cor. 2.4; Pickert (1955), S. 65], der Beweis läßt sich jedoch auf den Fall beliebiger Parallelstrukturen nicht übertragen, da in ihm wesentlich benutzt wird, daß zwei nichtparallele Geraden sich schneiden. Trivialerweise gilt aber jedenfalls: Mit τ sind auch τ^{-1} und $\pi\tau\pi^{-1}$ ($\pi \in \Pi$) Translationen; dasselbe gilt übrigens auch für zentrale Translationen. *Bilden also die Translationen (zentralen Translationen) eine Untergruppe, so auch einen Normalteiler.* Ferner kann man zeigen:

Satz 4.3. *Die Translationen einer a. P. bilden genau dann eine Gruppe, wenn jede Translation durch ihre Wirkung auf einen Punkt eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Es sei T die Menge aller Translationen der a. P. $\mathfrak{p}$.

(a) Sei T eine Gruppe; aus $p^\tau = p^{\tau'}$ für einen Punkt p von $\mathfrak{p}$ folgt $p^{\tau\tau'^{-1}} = p$ mit $\tau\tau'^{-1} \in \mathsf{T}$, also $\tau\tau'^{-1} = \underline{1}$, $\tau = \tau'$.

(b) Sei T keine Gruppe, dann gibt es $\tau, \tau' \in \mathsf{T}$ mit $\tau\tau'^{-1} \notin \mathsf{T}$, d.h. $\tau\tau'^{-1}$ ist eine nichtidentische Streckung mit einem Zentrum p. Einerseits ist $\tau \neq \tau'$, andererseits aber $p^{\tau\tau'^{-1}} = p$, mithin $p^\tau = p^{\tau'}$; es gibt somit zwei verschiedene Translationen, die beide dieselbe Wirkung auf p haben.

SATZ 4.4. *Jede zentrale Translation ist durch ihre Wirkung auf einen Punkt eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sei $\tau \neq \underline{1}$ eine zentrale Translation von $\mathfrak{p}$, die p in $p' \neq p$ überführt. Nach (a 3) [vgl. § 2] gibt es in $\mathfrak{p}$ mindestens einen nicht auf $\langle p, p' \rangle$ gelegenen Punkt q. Es ist $\langle p, q \rangle \| \langle p', q^\tau \rangle$, weil τ eine Translation, und $\langle p, p' \rangle \| \langle q, q^\tau \rangle$, weil τ zentral ist. Aus $q^\tau = \langle p', q^\tau \rangle \cap \langle q, q^\tau \rangle$ und der Eindeutigkeit des Ziehens von Parallelen [Axiom (a 2)] folgt, daß q^τ eindeutig bestimmt ist. Durch die Wirkung auf p ist also τ eindeutig auf den Punkten außerhalb von $\langle p, p' \rangle$ festgelegt. Ist aber $r \in \langle p, p' \rangle$, so $r \notin \langle q, q^\tau \rangle$, und wir können nun genau so die Eindeutigkeit von r^τ zeigen. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Seien τ, τ' zwei zentrale Translationen. Wäre $\tau\tau'$ eine p-Streckung, so $p^{\tau\tau'} = p$, $p^\tau = p^{\tau'^{-1}}$, nach dem eben bewiesenen Satz also $\tau\tau' = \underline{1}$. Mithin gilt der

ZUSATZ. *Das Produkt zweier zentraler Translationen ist eine Translation (von der nicht bekannt ist, ob sie notwendig zentral ist).*

Für spätere Untersuchungen ist folgender Satz nützlich.

SATZ 4.5. *Es seien τ und τ' zwei zentrale Translationen mit verschiedenen Zentren; dann ist $\tau\tau' = \tau'\tau$.*

Wir führen den Beweis dieses Satzes ganz entsprechend wie bei Ebenen [vgl. z.B. PICKERT (1955), S. 199]: Wir können o.B.d.A. $\tau, \tau' \neq \underline{1}$ annehmen. Weil τ und τ' verschiedene Zentren haben sollen, gilt $\langle p, p^\tau \rangle \neq \langle p, p^{\tau'} \rangle$ für jeden Punkt p. Da τ bzw. τ' zentrale Translationen sind, folgt $\langle p, p^\tau \rangle \| \langle p, p^{\tau'} \rangle^\tau = \langle p^\tau, p^{\tau'\tau} \rangle$ und $\langle p, p^\tau \rangle \| \langle p^{\tau'}, p^{\tau'\tau} \rangle$ bzw. $\langle p, p^\tau \rangle \| \langle p^{\tau'}, p^{\tau\tau'} \rangle$ und $\langle p, p^{\tau'} \rangle \| \langle p^\tau, p^{\tau\tau'} \rangle$, hieraus $p^{\tau\tau'} = \langle p^\tau, p^{\tau\tau'} \rangle \cap \langle p^{\tau'}, p^{\tau\tau'} \rangle = \langle p^\tau, p^{\tau'\tau} \rangle \cap \langle p^{\tau'}, p^{\tau'\tau} \rangle = p^{\tau'\tau}$, also $\tau\tau' = \tau'\tau$.

Für manche Spezialfälle ist es möglich, zu zeigen, daß die Translationen eine Gruppe bilden.

SATZ 4.6. *Jede der folgenden Bedingungen für eine a.P. $\mathfrak{p}$ ist hinreichend dafür, daß deren Translationen eine Gruppe bilden:*

(a) *$\mathfrak{p}$ ist endlich,*

(b) *jede Translation von $\mathfrak{p}$ ist zentral,*

(c) *$\mathfrak{p}$ ist eine affine Ebene.*

BEWEIS. Daß (a) hinreicht, folgt leicht aus einem Satz von FROBENIUS über endliche Permutationsgruppen, s. hierzu Satz 5.2 des nächsten Paragraphen. Daß (b) genügt, ergibt sich aus den Sätzen 4.3 und 4.4. Schließlich folgt (c) aus (b), da in einer Ebene jede Translation zentral ist.

5. Sei die a.P. $\hat{\mathfrak{p}} = (\hat{P}, \hat{\mathfrak{G}})$ eine Unterstruktur der a.P. $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ [vgl. § 2, Ziffer 5]. Jede Kollineation γ von $\mathfrak{p}$, für die $\hat{P}^\gamma = \hat{P}$ und $\hat{\mathfrak{G}}^\gamma = \hat{\mathfrak{G}}$ gilt [19]), induziert auf $\hat{\mathfrak{p}}$ eine Kollineation $\hat{\gamma}$, die durch $p^{\hat{\gamma}} = p^\gamma$ und $G^{\hat{\gamma}} = G^\gamma$ für $p \in \hat{P}$ bzw. $G \in \hat{\mathfrak{G}}$ definiert ist. Die Menge dieser so festgelegten Kollineationen bildet

[19]) Enthält jede Gerade aus $\hat{\mathfrak{G}}$ mindestens zwei Punkte aus $\hat{P}$, so genügt es offenbar, $\hat{P}^\gamma = \hat{P}$ zu fordern.

eine Gruppe $\hat{\Gamma}$, die vermöge der Abbildung $\gamma \to \hat{\gamma}$ homomorphes Bild der Kollineationsgruppe Γ von $\mathfrak{p}$ ist.

DEFINITION. Eine Unterstruktur $\hat{\mathfrak{p}} = (\hat{P}, \hat{\mathfrak{G}})$ der a.P. $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ heißt *kollineationstreu* in $\mathfrak{p}$, wenn gilt:

(a) *Jede Kollineation γ von $\mathfrak{p}$ erfüllt $\hat{P}^\gamma = \hat{P}$ und $\hat{\mathfrak{G}}^\gamma = \hat{\mathfrak{G}}$.*

(b) *Zu jeder Kollineation γ' von $\hat{\mathfrak{p}}$ gibt es genau eine Kollineation γ von $\mathfrak{p}$ derart, daß die von ihr auf $\hat{\mathfrak{p}}$ induzierte Kollineation $\hat{\gamma}$ mit γ' übereinstimmt.*

BEMERKUNG. Aussage (a) besagt, daß jede Kollineation von $\mathfrak{p}$ eine Kollineation auf $\hat{\mathfrak{p}}$ induziert; (b) bedeutet, daß man umgekehrt jede Kollineation von $\hat{\mathfrak{p}}$ auf diese Weise aus genau einer Kollineation von $\mathfrak{p}$ gewinnen kann. Liegt $\hat{\mathfrak{p}}$ kollineationstreu in $\mathfrak{p}$, so stimmen die Kollineationsgruppen von $\mathfrak{p}$ und $\hat{\mathfrak{p}}$ überein, wenn wir (was in diesem Falle möglich ist) γ mit $\hat{\gamma}$ identifizieren.

Sei jetzt insbesondere $\gamma = \tau$ eine Translation von $\mathfrak{p}$ mit $\hat{P}^\tau = \hat{P}$ und $\hat{\mathfrak{G}}^\tau = \hat{\mathfrak{G}}$. Dann ist offensichtlich $\hat{\tau}$ eine Translation auf $\hat{\mathfrak{p}}$; ist τ zentral auf $\mathfrak{p}$, so auch $\hat{\tau}$ auf $\hat{\mathfrak{p}}$. Um die von τ auf $\hat{\mathfrak{p}}$ induzierte Translation $\hat{\tau}$ bilden zu können, genügt es, $\hat{P}^\tau = \hat{P}$ zu fordern. Aus $p \in G \subseteq \hat{\mathfrak{G}}$, $p \in \hat{P}$ folgt nämlich wegen $G^\tau = \langle G \| p^\tau \rangle$ (s. § 2, Ende von Ziffer 2) und der Gültigkeit von (a 2) in $\hat{\mathfrak{p}}$ auch $G^\tau \in \hat{\mathfrak{G}}$, also $\hat{\mathfrak{G}}^\tau = \hat{\mathfrak{G}}$. Aus $\hat{\tau} = \underline{1}$ folgt, daß $\hat{\tau}$ und damit auch τ mindestens zwei Punkte von $\mathfrak{p}$ festläßt; nach Satz 4.1 ist also auch $\tau = \underline{1}$. Wegen der Homomorphieeigenschaft der Zuordnung $\tau \to \hat{\tau}$ folgt nunmehr $\tau_1 = \tau_2$ aus $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2$ für zwei Translationen τ_1 und τ_2.

Analog wie oben „kollineationstreu" können wir jetzt den Begriff „translationstreu" einführen. Eine Unterstruktur $\hat{\mathfrak{p}}$ der a.P. $\mathfrak{p}$ heißt *translationstreu* in $\mathfrak{p}$, wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

(a') *Für jede Translation τ von $\mathfrak{p}$ gilt $\hat{P}^\tau = \hat{P}$.*

(b') *Zu jeder Translation τ' von $\hat{\mathfrak{p}}$ gibt es eine Translation τ von $\mathfrak{p}$ derart, daß die von ihr auf $\hat{\mathfrak{p}}$ induzierte Kollineation $\hat{\tau} = \tau'$ ist.*

Wegen der beiden eben gemachten Bemerkungen folgt $\hat{\mathfrak{G}}^\tau = \hat{\mathfrak{G}}$ aus (a') und die Existenz nur einer Translation τ mit $\hat{\tau} = \tau'$ aus (b'). Damit ist die Analogie zwischen den Begriffen „kollineationstreu", und „translationstreu" vollständig hergestellt. Die Translationsgruppen von $\mathfrak{p}$ und $\hat{\mathfrak{p}}$ stimmen unter der Annahme der Translationstreue überein bei Identifizierung von τ mit $\hat{\tau}$.

Offensichtlich gilt die folgende Transitivitätsbeziehung:

SATZ 4.7. *Ist $\mathfrak{p}_1$ kollineationstreu (translationstreu) in $\mathfrak{p}_0$ und $\mathfrak{p}_2$ kollineationstreu (translationstreu) in $\mathfrak{p}_1$, so ist $\mathfrak{p}_2$ kollineationstreu (translationstreu) in $\mathfrak{p}_0$.*

Für die Aussage, die Unterstruktur $\mathfrak{p}$ von $\tilde{\mathfrak{p}}$ liege in $\tilde{\mathfrak{p}}$ translationstreu, sagen wir auch, $\tilde{\mathfrak{p}}$ sei eine *translationstreue Erweiterung* von $\mathfrak{p}$, oder $\tilde{\mathfrak{p}}$ sei translationstreu über[20]) $\mathfrak{p}$.

Beispiele translationstreuer Erweiterungen einer a.P. $\mathfrak{p} = (P, \mathfrak{G})$ erhält man folgendermaßen: Sei J eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit; dann werde die Erweiterung $\mathfrak{p}^{(J)} = (P, \mathfrak{G}^{(J)})$ von $\mathfrak{p}$ auf folgende Weise definiert:

[20]) Eine entsprechende Terminologie soll auch für kollineationstreu gelten.

Die Punkte von $\mathfrak{p}^{(J)}$ stimmen mit denen von $\mathfrak{p}$ überein. Die Geradenmenge $\mathfrak{G}^{(J)}$ von $\mathfrak{p}^{(J)}$ bestehe aus den Geraden von $\mathfrak{G}$ und den Paaren (p, j) mit $p \in P$ und $j \in J$:

$$\mathfrak{G}^{(J)} = \mathfrak{G} \cup \{(p, j) \mid p \in P,\ j \in J\}.$$

Die Geraden (p, j) sollen mit p, aber keinem anderen Punkt inzidieren. Zwei Geraden (p, j) und (p', j') $(p, p' \in P;\ j, j' \in J)$ seien genau dann zueinander parallel, wenn $j = j'$ ist. Keine der Geraden aus $\mathfrak{G}$ sei zu einem (p, j) parallel, während sich die in $\mathfrak{p}$ gegebene Parallelität auf $\mathfrak{p}^{(J)}$ überträgt. Man sieht nun, daß $\mathfrak{p}^{(J)}$ eine a.P. und Erweiterung von $\mathfrak{p}$ ist. Jede Translation τ von $\mathfrak{p}$ induziert in $\mathfrak{p}^{(J)}$ eine Translation (die wir ebenfalls τ nennen können), indem wir $(p, j)^\tau = (p^\tau, j)$ festsetzen, und umgekehrt erhält man so alle Translationen von $\mathfrak{p}^{(J)}$. Nun folgt sofort, daß $\mathfrak{p}^{(J)}$ eine translationstreue Erweiterung[21]) von $\mathfrak{p}$ ist.

In den Teilen III und IV werden wir weitere Beispiele translationstreuer Erweiterungen kennenlernen[22]).

Schließlich sei noch vermerkt, daß ganz analoge Betrachtungen für die affin-axialen Kollineationen (anstelle der allgemeinen Kollineationen oder Translationen) durchgeführt werden können.

§ 5. Sätze über spezielle Permutationsgruppen

1. In diesem Paragraphen beweisen wir einige Sätze über gewisse spezielle Permutationsgruppen, die für die Untersuchung endlicher a.P. von Interesse sind; insbesondere gelingt es uns mit ihnen, Satz 4.6 (a) zu beweisen. Es sei P eine *endliche* Menge von Elementen $p, q, \ldots$, die wir *Punkte* nennen wollen; ferner sei Π eine Gruppe von Permutationen der Punkte von P mit folgender zusätzlicher Eigenschaft:

(F) *Aus* $p, q \in P$, $p \neq q$, $\pi \in \Pi$ *und* $p^\pi = p$, $q^\pi = q$ *folgt* $\pi = \underline{1}$, *d.h. jede Permutation von* Π *ist durch ihre Wirkung auf zwei Punkte von* P *eindeutig bestimmt.*

Permutationsgruppen mit dieser Eigenschaft nennen wir *Frobenius-Gruppen*[23]). Aus Satz 4.1 folgt, daß z.B. die Gruppe der affin-axialen Kollineationen einer (endlichen) a.P. eine Frobenius-Gruppe ist, wenn wir sie als Permutationsgruppe auf ihren Punkten auffassen. Die Menge Π_p aller $\pi \in \Pi$ mit $p^\pi = p$ für ein $p \in P$ ist eine Untergruppe von Π, die Gruppe der *p-Streckungen*. - Eine Permutation von Π, die alles oder keinen Punkt von P festläßt, nennen wir *Translation*; die Menge aller Translationen von Π bezeichnen wir mit T.

Es ist das Ziel dieses Paragraphen, zu zeigen, daß T eine Untergruppe (und damit Normalteiler) in Π ist. Für ein auf P transitives Π besagt dies ein bekannter Satz von FROBENIUS, den man bisher allerdings nur mit Hilfe

[21]) Ist insbesondere $J = \emptyset$, so stimmt $\mathfrak{p}^{(J)}$ mit $\mathfrak{p}$ überein.

[22]) Während bei den hier betrachteten Beispielen die Punktmenge ungeändert blieb, werden dort sowohl die Punkt- als auch die Geradenmenge echt erweitert.

[23]) Diese Definition weicht von der in WIELANDT (1955), S. 10 gegebenen etwas ab.

der Theorie der Gruppencharaktere beweisen kann [s. hierzu etwa SPEISER (1937), S. 202]:

SATZ 5.1 (FROBENIUS). *Die Translationen einer transitiven Frobenius-Gruppe bilden einen transitiven Normalteiler.*

Wir nehmen jetzt an, daß P durch Π in n (>1) Transitivitätsgebiete P_i ($i=1, \ldots, n$) zerfalle[24]: $P=\bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Die Gruppe Π^{P_i} der von Π auf P_i induzierten Permutationen (der *Konstituent* von Π auf P_i) ist eine auf P_i transitive Frobenius-Gruppe. Es sei T_i die Menge derjenigen Permutationen von Π, die auf P_i Translationen induzieren; T_i ist eine Untergruppe von Π, denn wenn τ, $\tau' \in \mathsf{T}_i$ auf P_i Translationen induzieren, so auch $\tau\tau'^{-1}$ nach Satz 5.1, angewandt auf Π^{P_i}. Mithin ist auch $\mathsf{T}^*=\bigcap_{i=1}^{n} \mathsf{T}_i$ eine Untergruppe von Π.

Enthält ein Transitivitätsgebiet von Π nur einen Punkt p, so ist $\Pi=\Pi_p$, also $\mathsf{T}=\{\underline{1}\}$ eine Gruppe. Wir nehmen jetzt an, daß jedes Transitivitätsgebiet P_i mindestens zwei Punkte enthalte: $|P_i|>1$[25]. In diesem Fall ist $\mathsf{T}=\mathsf{T}^*$. Jede Translation von P induziert nämlich eine Translation in P_i, das bedeutet $\mathsf{T}\subseteq\mathsf{T}^*$. Sei umgekehrt $\tau\in\mathsf{T}^*$. Nach Definition läßt τ in jedem P_i alles oder keinen Punkt fest. Läßt τ in einem P_i alle Punkte fest, wegen $|P_i|>1$ also mindestens zwei, so ist $\tau=\underline{1}$, weil Π, also auch T^*, eine Frobenius-Gruppe ist. Somit ist τ eine Translation, $\mathsf{T}^*\subseteq\mathsf{T}$, also $\mathsf{T}^*=\mathsf{T}$, was behauptet war. Wir erhalten also [s. auch FROBENIUS (1902), oder WIELANDT (1955), S. 11 oben]:

SATZ 5.2. *Die Translationen einer Frobenius-Gruppe bilden einen Normalteiler.*

In diesem Satz ist Satz 4.6 (a) als Spezialfall enthalten.

2. Über die Streckungen einer Frobenius-Gruppe gibt Auskunft der

SATZ 5.3 [FROBENIUS (1902)]. *Sei Π eine Frobenius-Gruppe auf P. Die Menge aller Punkte $p\in P$ mit $\Pi_p>\{\underline{1}\}$ ist entweder leer oder stimmt mit genau einem Transitivitätsgebiet P_1 von Π überein. In diesem Falle gilt:*

(a) *Für alle $p\in P_1$ ist $\Pi_{p^\pi}=\pi^{-1}\Pi_p\pi$ ($\pi\in\Pi$) und $\Pi=\Pi_p\mathsf{T}$.*

(b) *P_1 ist auch Transitivitätsgebiet bezüglich der Gruppe T der Translationen von Π. Insbesondere ist also Π genau dann transitiv, wenn T es ist.*

(c) *Die übrigen Transitivitätsgebiete von Π zerfallen in ebensoviele Transitivitätsgebiete hinsichtlich T wie Π_p ($p\in P_1$) Elemente hat. Jedes Transitivitätsgebiet T von T ist ein Block* [s. WIELANDT (1955), § 6] *von Π_p, d.h. aus $\pi\in\Pi_p$ folgt $T^\pi=T$ oder $T^\pi\cap T=\emptyset$.*

Zum Beweis verweisen wir auf die entsprechenden Untersuchungen über Perspektivitäten endlicher Ebenen in ANDRÉ (1955); die dort angegebenen Beweise kann man direkt übertragen, da in ihnen lediglich benutzt wurde,

[24] Ist p ein fester Punkt von P_i, so besteht also P_i aus genau allen p^π mit $\pi\in\Pi$, d.h. es ist $P_i=p^\Pi$.

[25] Mit $|M|$ bezeichnen wir die Mächtigkeit einer Menge M.

daß die Perspektivitäten (affin-axialen Kollineationen) eine Frobenius-Gruppe bilden. Lediglich die Blockeigenschaft der Transitivitätsgebiete von T hinsichtlich Π_p wurde dort nicht bewiesen; sie folgt aber leicht so [WIELANDT (1955), § 6]: Ist $q \in T^\pi \cap T$ für ein Transitivitätsgebiet T von T, ferner $r \in T$, $s \in T^\pi$, so gibt es $\tau, \tau' \in \mathsf{T}$ mit $r = p^\tau$ und $s = q^{\tau'}$ (denn mit T ist auch T^π Transitivitätsgebiet von T), mithin liegen r und s in demselben Transitivitätsgebiet von T, also gilt $T = T^\pi$, was behauptet war.

Literatur

ANDRÉ, J.: Über Perspektivitäten in endlichen projektiven Ebenen. Arch. Math. **6**, 29—32 (1955).

— Über Perspektivitäten in endlichen affinen Ebenen. Arch. Math. **9**, 228—235 (1958).

— Affine Ebenen mit genügend vielen Translationen. Math. Nachr. **19**, 204—210 (1959).

ARTZY, R.: Eigenschaften von ebenen Viergeweben allgemeiner Lage. Math. Ann. **126**, 336—342 (1953).

BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942).

BLASCHKE, W., u. G. BOL: Geometrie der Gewebe. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1938.

FROBENIUS, G.: Über primitive Gruppen des Grades n und der Klasse $n-1$. S.-B. Akad. Berlin 455—459 (1902).

HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943).

HUGHES, D. R.: A class of non-desarguesian projective planes. Canad. J. Math. **9**, 378—388 (1957).

LOMBARDO-RADICE, L.: I piani di refrazioni. Rend. Mat. Roma **13**, 130—139 (1954).

MOULTON, F. R.: A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902).

NAUMANN, H.: Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Math. Z. **60**, 120—141 (1954, a).

— Über das zweite Distributivgesetz im Zusammenhang mit den Geweben von Herrn ARTZY. Math. Ann. **128**, 92—94 (1954, b).

PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

REIDEMEISTER, K.: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1930.

SALZMANN, H.: Kompakte zweidimensionale Ebenen. Arch. Math. **9**, 447—454 (1958).

SPEISER, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1937.

WIELANDT, H.: Permutationsgruppen. Hektographierte Vorlesungsausarbeitung, Universität Tübingen 1955.

ZAPPA, G.: Piani affini con traslationi. Ric. Matematica **7**, 1—13 (1959).

Braunschweig, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 13. Oktober 1960)

Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen

Von Dr. LOTHAR HEFFTER, Professor an der Universität Freiburg i. Br.

Zweite, wesentlich verbesserte Auflage

Mit 13 Abbildungen im Text. VIII, 64 Seiten Gr.-8°. 1960. Steif geheftet DM 19,80

INHALTSÜBERSICHT

Vorkenntnisse · Sechs verschiedene Wege zur Begründung der Funktionentheorie: Definition der „analytischen Funktion". Die Wege von CAUCHY 1814 und GOURSAT 1900. Der Weg von LOOMAN-MENCHOFF 1933. Ältere Wege bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$. Der einfachste Weg bei Voraussetzung eindeutiger Integrierbarkeit von $f(z)$ 1936. Ein neuer Weg unter Benutzung von Polarkoordinaten 1951. Vergleich der Voraussetzungen in Kap. II—VI · Originalliteratur zur Geschichte der Begründung der Funktionentheorie · Lehrwerke der Funktionentheorie · Verzeichnis der gebrauchten Begriffe.

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Die Tatsache, daß man bei Funktionen eines komplexen Argumentes aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit auf die unbeschränkte Differenzierbarkeit und sogar auf die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe schließen kann, ganz im Gegensatz zum Reellen, macht eine Überprüfung der zum Aufbau der Funktionentheorie nötigen Voraussetzungen besonders anziehend. Insofern entspricht die vorliegende Schrift, die letzte Frucht jahrzehntelanger Bemühungen des Verfassers, sicher einem Bedürfnis. Die wichtigsten Reduktionen der ursprünglichen CAUCHYschen Voraussetzung einmaliger stetiger Differenzierbarkeit, nämlich der Satz von GOURSAT und der Satz von LOOMAN-MENCHOFF, werden im Wortlaut genannt, und der erste dieser Sätze wird bewiesen. Bei den sonstigen Ausführungen wird der Leser viele Akzente anders setzen als der Verfasser und manche Bemerkung, die über mathematische Dinge gemacht wird, in den Bereich der Didaktik verweisen." *Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik*

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Soeben erschien:

Grundzüge der Ausgleichungsrechnung

nach der Methode der kleinsten Quadrate nebst Anwendung in der Geodäsie

Von Dr.-Ing. WALTER GROSSMANN,
o. Professor an der Technischen Hochschule Hannover

Zweite, erweiterte Auflage

Mit 56 Abbildungen. XII, 345 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 31,50

INHALTSÜBERSICHT

Grundzüge der Fehlerlehre · Ausgleichung von direkten Beobachtungen · Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen · Ausgleichung von bedingten Beobachtungen · Sonderfälle und Grenzgebiete · Anwendungen der Matrizenrechnung auf die Ausgleichungsrechnung · Schrifttum (Auswahl) · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Das Buch hält die glückliche Mitte zwischen den umfangreichen nicht immer leicht zu überblickenden klassischen Handbüchern der Ausgleichungsrechnung und den zahlreichen knappen „Einführungen", vor denen es vor allem die Ausstattung mit zahlreichen Zahlenbeispielen voraus hat. Neuaufgenommen in die 2. Auflage sind neben einer Vertiefung nach der theoretischen Seite und einigen neuen Anwendungen u. a. moderne Verfahren zur Auflösung von Normalgleichungen und Anweisungen zur Behandlung korrelierter Beobachtungen. Ganz kurz werden die Beziehungen zwischen Ausgleichungsrechnung und mathematischer Statistik und etwas ausführlicher die Anwendungen der Matrizen in der Ausgleichungsrechnung behandelt.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A G., Würzburg
Printed in Germany